Міністерство освіти і науки України
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

# Методичні вказівки
до лабораторних робіт
з дисципліни «Математична обробка результатів вимірювань»
для студентів за спеціальностями 015.13 «Професійна освіта» (Метрологія, стандартизація та сертифікація) та 015.20 «Професійна освіта» (транспорт), освітньо-кваліфікаційний рівень – бакалавр

Харків 2018

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний автомобільно-дорожній університет

Методичні вказівки
до лабораторних робіт
з дисципліни «Математична обробка результатів вимірювань»
для студентів за спеціальностями 015.13 «Професійна освіта» (Метрологія, стандартизація та сертифікація) та 015.20 «Професійна освіта» (транспорт), освітньо-кваліфікаційний рівень – бакалавр

Затверджено
методичною радою університету,
протокол № від

Харків 2018

Упорядник: ЦИБУЛЬСЬКИЙ Вадим Анатолійович

Кафедра технології машинобудування і ремонту машин

Дані методичні вказівки призначаються для студентів за спеціальностями 015.13 «Професійна освіта» (Метрологія, стандартизація та сертифікація) та 015.20 «Професійна освіта» (транспорт), освітньо-кваліфікаційний рівень – бакалавр при підготовці та виконанні лабораторних робіт з дисципліни «Математична обробка результатів вимірювань».

Якість продукції є одним з найважливіших показників виробництва і разом з продуктивністю, собівартістю, прибутком та іншими показниками являється характеристикою його ефективності. Якість продукції разом з ціною виступають головними чинниками конкурентоспроможності продукції, що в умовах ринкової економіки є надзвичайно важливим. Саме тому керівниками підприємств контролю якості на виробництві приділяється багато уваги.

При контролі якості продукції на виробництві в наш час неможливо обійтись без вимірювань. Вимірювання є основною складовою наукових досліджень. В повсякденному житті ми також дуже часто зіштовхуємося з необхідністю вимірювання тієї чи іншої фізичної величини. Отже вимірювання для сучасного суспільства набули майже загального характеру. Для їх виконання існує велика кількість вимірювального інструменту і приладів. З кожним роком зростає їх кількість і складність, покращуються метрологічні характеристики, насамперед, точність засобів вимірювання. Тому знання теоретичних основ технічних вимірювань, принципів, за якими вибираються засоби вимірювання, вміння виконувати математичну обробку результатів вимірювання, аналізувати і представляти отриману інформацію в необхідному вигляді, використовуючи при цьому сучасні досягнення науки, комп΄ютерні технології – є на часі і, надзвичайно, важливим при підготовці студентів за спеціальностями 015.13 «Професійна освіта» (Метрологія, стандартизація та сертифікація) та 015.20 «Професійна освіта» (транспорт).

Методи математичної обробки результатів вимірювань розроблено як для використання їх при наукових дослідженнях, так і управління ходом технологічного процесу і контролю якості за результатами вимірювань партій деталей, що виробляються.

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1
# РОЗРАХУНОК СТАТИСТИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ (ВВ), ДОВІРЧИХ ІНТЕРВАЛІВ І ОБСЯГУ ВИБІРКИ

Мета роботи – освоїти методику визначення статистичних характеристик випадкової величини (результатів вимірів), довірчих інтервалів і необхідного обсягу вибірки.

## 1. Основні теоретичні відомості

Основні дані, якими ми користуємось при аналізі окремих технологічних операцій, виробничих процесів треба вміти належним чином збирати, обробляти, аналізувати і представляти. Необхідність отримання даних може переслідувати за мету:

– контроль і регулювання виробничого процесу;
– аналіз відхилень від встановлених вимог;
– контроль продукції, тощо.

Після того як ми визначимося з метою і отримаємо необхідну інформацію, слід почати з нею працювати.

Отже, для початку розглянемо деякі важливі і необхідні нам в подальшому поняття.

Величина називається *випадковою*, якщо в результаті опиту (випробовування) вона приймає значення, яке заздалегідь нам не звісно. Прикладами випадкових величин є довговічність зразків при втомних випробовуваннях, межі міцності і текучості, відносне подовження, твердість, розмір деталей, який отримують при механічній обробці тощо.

Випадкова величина характеризується областю можливих значень, які вона може приймати в результаті опиту, і ймовірністю отримання цих значень.

Існують випадкові величини двох типів: *дискретні* (перервні) і *безперервні*. Дискретна випадкова величина може приймати ізольовані одне від одного значення, які можна перерахувати. Наприклад, число членів сім’ї, число верстатів, автомобілів. Безперервна випадкова величина може приймати любі значення з деякого кінцевого або нескінченного інтервалу. Наприклад, час до руйнування зразків є безперервною величиною і може приймати цілі і часткові значення в нескінченному або кінцевому інтервалі.

Усі характеристики механічних властивостей матеріалів і розміри деталей являються безперервними випадковим величинами.

З поняттям масового явища невід'ємно зв'язано поняття статистичної сукупності.

*Статистичною сукупністю* називається сукупність об'єктів схожих у якомусь відношенні і в той самий час, яким притаманні змінні ознаки, які можуть бути предметом статистичного вивчення.

Статистична сукупність складається з окремих *елементів* або *одиниць*. Їх загальне число називається *обсягом сукупності.*

Залежно від повноти обстеження одиниць сукупності розрізняють генеральну і вибіркову сукупності. *Генеральною сукупністю* називається сукупність усіх спостережень, які можна було б гіпотетично зробити при даних умовах вимірювань. Прикладом генеральної сукупності може бути нескінченно велика сукупність зразків (результатів випробувань), які можуть бути виготовлено з матеріалу, що досліджується. Кінцева сукупність зразків (результатів випробувань), що є часткою генеральної сукупності називається *вибіркою*. Метод, який полягає у тому, що на підставі характеристик і властивостей вибірки $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ робиться висновок про числові характеристики і закон розподілу ВВ $X$, називається *вибірковим методом.*

Отримані в результаті вимірювань (спостережень) статистичні дані необхідно систематизувати, привести до необхідного вигляду. Розмістивши окремі значення ознак (варіантів) у зростаючому або зменшувальному порядку, отримаємо *ранжируваний ряд розподілу*.

Однак ранжируваний ряд ще не дає загальної картини розподілу, так як з нього не видно, яку закономірність закладено у розподіл, навкруги якої величини концентруються окремі варіанти. Тому виникає необхідність подальшого узагальнювання статистичних даних, об'єднання їх в окремі групи і підрахунку частот для кожної з них. Таким чином ми отримуємо варіаційний ряд розподілу.

*Варіаційним рядом розподілу* називається впорядкована статистична сукупність, у якій значення (варіанти) розташовано у ранжируваний ряд і наведено для кожного інтервалу (групи) відповідні значення частот (частостей).

Розмах варіації $R$ – це різниця між найбільшим $x_{max}$ і найменшим $x_{min}$ значеннями ознаки

$$R = x_{\max} - x_{\min}\,. \tag{1.1}$$

Для наочності варіаційні ряди розподілу можна зобразити графічно у вигляді гістограми або полігону. Якщо по горизонтальній вісі відкладати значення величини, що вимірюється, а по вертикальній – частоту появи цих значень, то отримаємо розподіл величини.

Гістограма (рис. 1.1) служить для зображення інтервального варіаційного ряду розподілу, полігон, як правило, – дискретного варіаційного ряду.

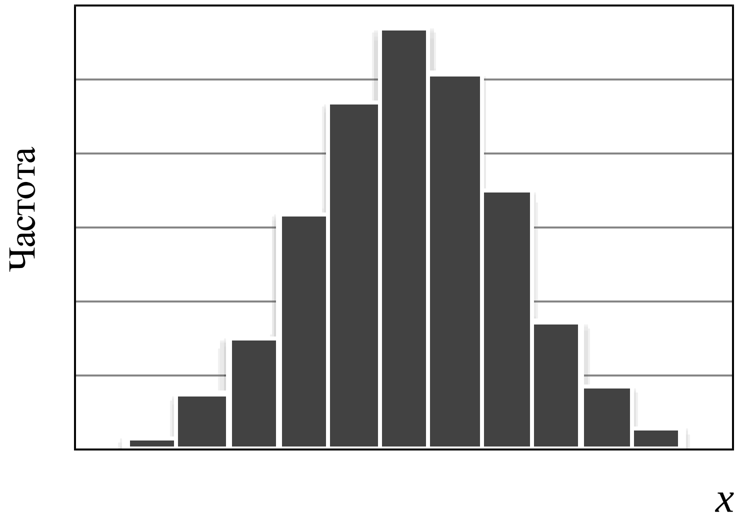


Рисунок 1.1 – Приклад побудови гістограми

Побудувавши полігон або гістограму, можна отримати перше представлення про *форму розподілу,* під якою розуміють форму його графіка, який ми будемо мати, якщо зменшувати інтервал $\Delta x$ і, за рахунок цього, збільшувати число інтервалів у гістограмі. Остання, таким чином, переходить у плавну криву розподілу, яка відображує нормальний закон розподілу ВВ і зветься в математичній статистиці законом Гауса (рис. 1.2).

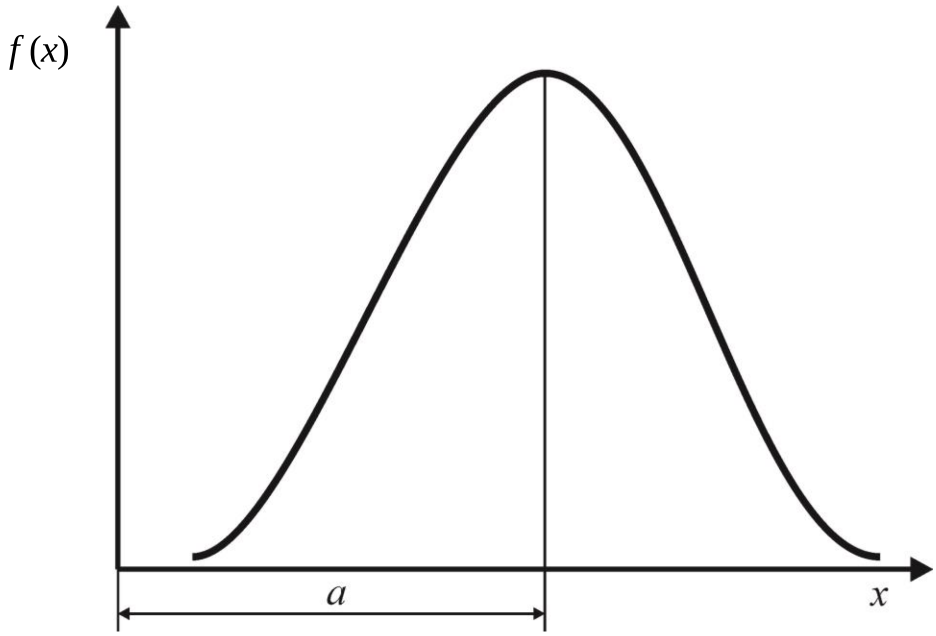


Рисунок 1.2 – Крива нормального розподілу величини $X$

Аналітичне вираження цього закону

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (1.2)$$

де $x$ – значення ВВ;

$a$ – математичне сподівання ВВ;

$\sigma^2$ – дисперсія ВВ.

Різниця між кількісними ознаками у вибіркових і генеральних сукупностях залежить від обсягу вибірки. З збільшенням числа випробувань (вимірювань) у відповідності до закону великих чисел вибіркові характеристики збігаються по ймовірності з генеральними характеристиками, або, інше кажучи, вірогідність події, яка полягає у тому, що різниця між вказаними ознаками не буде перевищувати як можна малу величину, при збільшенні обсягу вибірки безмежно наближається до одиниці.

На практиці зазвичай на підставі вибіркових характеристик судять про рівень генеральних характеристик. До таких характеристик відносяться наступні вибіркові характеристики:

$\bar{x}$ – вибіркове середнє значення ВВ $X$;

$S^2$ – вибіркова дисперсія;

$S$ – вибіркове середнє квадратичне відхилення;

$V$ – вибірковий коефіцієнт варіації.

*Визначення вибіркових характеристик ВВ.* Вибіркове середнє значення (оцінка математичного сподівання $a$) ВВ визначається за формулою

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i , \tag{1.3}$$

де $x_i$ – значення випадкової величини;

$n$ – число елементів сукупності.

При обмеженому числі вимірювань (обмежена вибірка) вибіркова дисперсія (оцінка генеральної дисперсії $\sigma^2$) визначається за формулою

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 . \tag{1.4}$$

Дисперсія $S^2$ (генеральна дисперсія $\sigma^2$) характеризує розкид результатів вимірювань, ширину кривої розподілу (рис. 1.2). Тому дисперсія може характеризувати точність методики, однорідність результатів вимірювань.

Вибіркове середнє квадратичне відхилення $S$, відповідно до формули (1.4)

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} . \tag{1.5}$$

Вибірковий коефіцієнт варіації визначається за формулою

$$V = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100\,\% . \tag{1.6}$$

Коефіцієнт варіації показує, наскільки значним є розсіювання у порівнянні з середнім значенням $\bar{x}$ ВВ.

*Побудова довірчих інтервалів.* Перша задача, яка виникає при оцінці результатів вимірювань, – визначення похибки вимірювань математичного сподівання $a$ по обмеженій вибірці. Значення $\bar{x}$ лише приблизно оцінює $a$, тобто $(\bar{x} - \delta) \le a \le (\bar{x} + \delta)$. Зауважимо, що $\delta$ також випадкова величина і в різних серіях вимірювань вона може бути реалізована по-різному. Тому, оцінюючи $\delta$, задаємося надійністю – довірчою ймовірністю, з якою гарантується поява похибки, що не виходить за межі $\delta$. Якщо позначити довірчу ймовірність $P$, то ступінь ризику

$$1 - P = \alpha, \tag{1.7}$$

де α – рівень значущості.

Значення всіх статистичних критеріїв виражаються через рівень значущості або довірчу ймовірність. Зазвичай в техніці приймають α = 0,05, що відповідає 95 % надійності. Якщо число вимірювань велике і відомо значення дисперсії $\sigma^2$, то неважко визначити $\delta$ – довірчий інтервал при різних значеннях довірчої ймовірності. З формули (1.2) витікає правило «трьох сигм», що полягає в тому, що в інтервалі ± 3σ знаходиться 99,7 % всіх результатів, в інтервалі ± 2σ – 95 % і в інтервалі ± σ – 68 %.

Якщо число вимірювань обмежено, то довірчий інтервал визначається за формулою [1, 2, 3, 4]

$$\delta = t_{\alpha;m} \cdot S / \sqrt{n}, \tag{1.8}$$

де $t_{\alpha;m}$ – коефіцієнт Стьюдента;

$S$ – корінь квадратний з вибіркової дисперсії;

$n$ – число вимірювань.

Отже, довірчий інтервал для математичного сподівання, таким чином, запишеться у вигляді

$$\bar{x} - \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{\alpha;m} \le a \le \bar{x} + \frac{S}{\sqrt{n}} \cdot t_{\alpha;m} . \tag{1.9}$$

*Визначення обсягу вибірки*. Обґрунтування обсягу випробувань (вимірювань) з метою визначення кількісних характеристик з заданим ступенем точності і надійності є основною задачею планування випробувань (вимірювань). Від правильного визначення обсягу вибірки залежить обсяг дослідження, терміни, в які воно буде проведено, фінансові витрати і ряд інших організаційних проблем, а також, що власне важливо, точність і надійність результатів дослідження.

Як правило, технолог при технологічних дослідженнях використовує вибіркову сукупність. При цьому йому необхідно бути достатньо впевненим в тому, що характеристики, отримані на підставі аналізу вибірки, відрізняються від відповідних характеристик генеральної сукупності із заданою точністю і надійністю. Це дозволить поширити висновки, отримані шляхом аналізу вибірки, на всю генеральну сукупність. У зв'язку з цим обсяг вибірки залежить від тієї точності та надійності, з якими технолог-дослідник бажає отримати результати аналізу. Крім того, обсяг вибірки залежить від виду статистичних показників, за допомогою яких характеризуються особливості досліджуваного явища.

Найбільш простим методом визначення необхідного обсягу вибірки $n$ є метод з використанням таблиці досить великих чисел [1]. Однак користуючись цим методом отримуємо завищений обсяг вибірки $n$. У зв'язку з цим даний метод слід застосовувати в тих випадках, коли вибіркова сукупність становить невелику частину генеральної сукупності ($N > 20n$; $N$ – обсяг генеральної сукупності); проводяться разові дослідження технологічного процесу або дослідження виконується вперше (раніше про статистичні характеристики процесу нічого не було відомо).

У загальному випадку обсяг вибірки $n$ в залежності від точності $\delta$ і надійності α, а також залежно від виду статистичних характеристик, що визначаються і співвідношення обсягів вибіркової і генеральної сукупності визначають за формулами, наведеними в [1, 2, 3, 4].

При звісному значенні статистичної характеристики $S$, задаючись рівнем значущості α і похибкою $\delta$ у абсолютних одиницях ознаки, яка нас задовольняє, з формули (1.8) можна знайти обсяг вибірки $n$

$$n = \frac{t_{\alpha;m} \cdot S}{\delta} . \qquad (1.10)$$

## 2. Порядок виконання

1. Для вибіркових сукупностей ВВ, які на початку заняття кожен студент отримує від викладача визначити статистичні характеристики за формулами (1.3) – (1.6).
2. За формулою (1.8) визначити довірчий інтервал для математичного сподівання ВВ і записати результат у вигляді (1.9).
3. Задаючись рівнем значущості α=0,05 і похибкою $\delta$ у абсолютних одиницях ознаки, за формулою (1.10) знаходиться обсяг вибірки $n$, який задовольняє обраним умовам.
4. Виконується аналіз отриманих результатів і робиться відповідний висновок.

## 3. Контрольні запитання

1. Що називається випадковою величиною?
2. Чим відрізняються дискретні і безперервні величини? Навести приклади дискретних і безперервних величин.
3. Різниця між ранжируваним і варіаційним рядами.
4. Пояснити що таке закон розподілу ВВ.
5. Чим відрізняються поняття частоти і частості ВВ?
6. Статистичні оцінки вибіркових параметрів розподілу.
7. Якому закону розподілу підпорядковуються розміри деталей при механічній обробці?
8. Що таке довірча ймовірність і рівень значущості?
9. Про що свідчить правило «трьох сигм»?
10. Поняття генеральної і вибіркової сукупності.
11. В чому полягає сутність вибіркового методу?
12. Яка вибірка вважається великою, а яку слід вважати малою?
13. Сутність коефіцієнта Стьюдента $t_{\alpha;m}$.
14. Що характеризують дисперсія і коефіцієнт варіації ВВ?

# ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2
# ОЦІНКА АНОРМАЛЬНОСТІ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ

Мета роботи – освоїти методику перевірки результатів вимірювань (досліджень), що різко відрізняються, на їх приналежність до однієї генеральної сукупності.

## 1. Основні теоретичні відомості

Досить часто на практиці при дослідженні технологічних процесів мають випадки, коли в результаті проведення вимірювань (експериментів) виникає груба похибка (анормальність) результату вимірювання.

Груба похибка вимірювання може виникнути в результаті прорахунків дослідника під час вимірювання деталей, не правильного вибору вимірювальних баз, перекосів деталей, наявності поштовхів тощо.

Груба похибка обробки може стати результатом похибки базування деталей, похибок заготовки, які призводять до значних перекосів деталей на позиції обробки.

І ті й інші грубі похибки значно впливають на оцінку точності технологічних процесів та призводять до того, що окремі результати дослідження за своєю величиною значно відрізняються від інших.

Анормальним називається результат дослідження, який різко відрізняється від групи результатів, які одержано під час цього дослідження, та є нормальними.

Якщо технолог впевнений, що анормальний результат є результатом помилки, то його не треба враховувати при наступному аналізі. Якщо такої впевненості немає, то для визначення того, чи є результат, що різко відрізняється, грубою помилкою, чи випадковим відхиленням, необхідно застосувати один із нижче описаних методів встановлення грубих помилок експерименту.

В значній більшості задача розв’язується за допомогою статистичних критеріїв.

На підставі результатів всієї сукупності вимірювань розраховують значення статистичного критерію та порівнюють його з табличним значенням. Якщо розрахункове значення менше за табличне, то гіпотезу про належність сумнівного результату до даної генеральної сукупності приймають і результат зараховують, якщо ж ні – результат відхиляють.

Метод Ірвіна [1, 3] полягає в тому, що спочатку за даними досліджень розраховують характеристики і середнє арифметичне значення $\bar{x}$ і середнє квадратичне відхилення $s$ за формулами

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \,, \tag{2.1}$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2} \,, \tag{2.2}$$

де $x_i$ – значення випадкової величини (результату вимірювання);

$n$ – кількість вимірювань.

Всі дослідні дані вибірки (результати вимірювань) розміщують у зростаючому або спадаючому порядку (ранжируваний ряд розподілу), тобто

$$x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_{n-1} \le x_n \,. \tag{2.3}$$

З одержаного ряду обирають результати (найбільший або найменший), що визивають найбільші сумніви. Наприклад, у випадку сумнівів стосовно найбільшого результату $x_n$ у ряді (2.3) беруться величини $x_n$ і $x_{n-1}$ та розраховують величину

$$\lambda = \frac{x_n - x_{n-1}}{S} \,, \tag{2.4}$$

де $x_n$ – результат, до якого є сумніви;

$x_{n-1}$ – результат, що є найближчим до сумнівного.

З табл. 2.1 в залежності від обсягу вибірки $n$ при рівні значущості α = 0,05 (довірчій ймовірності $P = 1 - \alpha = 0{,}95$) знаходять критичне значення $\lambda_p$.

Таблиця 2.1 – Значення критерію Ірвіна $\lambda_{0,95}$

| Параметр | Значення параметра | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n$ | 2 | 3 | 10 | 20 | 30 | 50 | 100 | 400 | 1000 |
| $\lambda_{0,95}$ | 2,8 | 2,2 | 1,5 | 1,3 | 1,2 | 1,1 | 1,0 | 0,9 | 0,8 |

У разі виконання умови $\lambda \le \lambda_{0,95}$ нульова гіпотеза приймається і результат зараховується, коли $\lambda \ge \lambda_{0,95}$ – нульова гіпотеза відхиляється і сумнівний результат відкидається. При вибірках обсягом більше 50 відхилення результатів, що різко відрізняються, не проводять, так як вони суттєво не впливають на точність оцінки числових характеристик і параметрів розподілу випадкової величини.

З тією ж метою використовують більш строгий критерій Романовського [1, 2, 3], який передбачає визначення вибіркового середнього $\overline{\mathrm{X}}$ і вибіркового середнього квадратичного відхилення $S$ за формулами (2.1) і (2.2), спочатку відкинувши із вибірки значення $x_i'$, що різко відрізняється.

Після цього визначають величину $t_\alpha$ за формулою

$$t_\alpha = \frac{\left| x_i' - \overline{\mathrm{X}} \right|}{S}. \tag{2.5}$$

Допустимі значення $t_\alpha'$ в залежності від рівня значущості α і числа членів варіаційного ряду $n$ наведено в табл. 2.2.

Якщо $t_\alpha \le t_\alpha'$, то з імовірністю $P=1–\alpha$ можна стверджувати, що значення $x_i'$ варіаційного ряду є випадковим результатом і його відкидати не можна. Якщо ж $t_\alpha \ge t_\alpha'$, то значення $x_i'$, що різко відрізняється, є грубою помилкою і його слід відкинути.

При застосуванні даного методу, після виключення з вибірки значення, що різко відрізняється, немає необхідності повторного перерахунку характеристик $\bar{x}$ і $S$.

В даній лабораторній роботі для апробації названих методів викладач видає кожному студенту індивідуальне завдання: провести перевірку даних, що отримані при випробуваннях зразків на твердість.

Таблиця 2. 2 – Допустимі значення $t'_\alpha$ при ризику $\alpha = 0{,}05$

| n' | Значення $t'_\alpha$ при α | | | | n' | Значення $t'_\alpha$ при α | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,001 | | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,001 |
| 2 | 15,6 | 39,0 | 78,0 | 779,7 | 15 | 2,2 | 2,7 | 3,1 | 4,3 |
| 3 | 5,0 | 8,0 | 11,5 | 36,5 | 20 | 2,2 | 2,6 | 2,9 | 4,0 |
| 4 | 3,6 | 5,1 | 6,5 | 14,5 | 25 | 2,1 | 2,5 | 2,9 | 3,8 |
| 5 | 3,0 | 4,1 | 5,0 | 9,4 | 30 | 2,1 | 2,5 | 2,8 | 3,7 |
| 6 | 2,8 | 3,6 | 4,4 | 7,4 | 40 | 2,0 | 2,5 | 2,7 | 3,6 |
| 7 | 2,6 | 3,4 | 4,0 | 6,4 | 60 | 2,0 | 2,4 | 2,7 | 3,5 |
| 8 | 2,5 | 3,2 | 3,7 | 5,7 | 120 | 2,0 | 2,4 | 2,6 | 3,4 |
| 9 | 2,4 | 3,1 | 3,5 | 5,3 | ∞ | 2,0 | 2,3 | 2,6 | 3,3 |
| 10 | 2,4 | 3,0 | 3,4 | 5,0 | | | | | |

Такі випробування досить розповсюджений вид випробувань матеріалів деталей, які не викликають руйнування виробу, не потребують виготовлення спеціальних зразків. Для випробувань достатньо невеликої дільниці на поверхні деталі, обробленої шліфувальним кругом [5].

Під час дослідження твердості зразків застосовувані методи випробувань твердості передбачають вдавлювання індентора (стального шарика, алмазного конуса, алмазної піраміди) і визначення розмірів його відбитку.

Прилади, які призначені для визначення твердості, називаються твердомірами.

Методи випробувань твердості матеріалів можна розділити на статичні та динамічні.

При статичному методі визначення твердості по Бринелю стальний шарик діаметром $D$ вдавлюється в дослідний зразок під дією навантаження $P$, яке прикладається протягом певного часу (рис. 2.1).

При вимірюванні твердості використовують шарики діаметром 1 мм; 2 мм; 2,5 мм; 5 мм та 10 мм.

Число твердості по Бринелю ($HB$) визначають шляхом ділення величини навантаження, в Н, до площі сферичної поверхні відбитку, в мм$^2$, за формулою

$$HB = \frac{0{,}102 \cdot 2P}{\pi D \cdot \left(D - \sqrt{D^2 - d^2}\right)}, \tag{2.6}$$

де $D$ – діаметр шарика, мм;

$d$ – діаметр відбитку, мм.

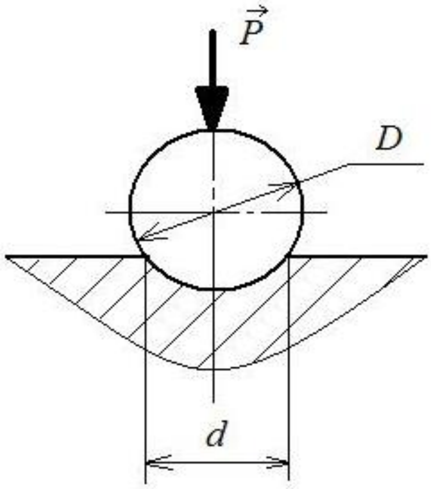


Рисунок 2.1 – Схема для визначення твердості по Бринелю

Діаметри відбитків повинні знаходитись в межах $0{,}2D \le d \le 0{,}5D$. При ігноруванні цієї умови випробування вважається не дійсним. Відстань від центра відбитку до краю зразка повинна бути не менше $2{,}5D$, а відстань між центрами двох сусідніх відбитків – не менше $4D$. Товщина поверхні, на якій визначається твердість, повинна бути не менше десятикратної глибини відбитку.

Для більш точного вимірювання твердості слід застосовувати шарики якомога найбільшого діаметра (в ході лабораторних робіт $D = 10$ мм) і відповідне навантаження $P = 29420$ $H$ із витримуванням $t = 10$ с (для чорних металів та їх сплавів).

Для визначення числа твердості *НВ* діаметр відбитку слід вимірювати в двох взаємно перпендикулярних напрямках і брати середнє значення з двох вимірювань. При цьому різниця вимірювань діаметрів одного відбитку не повинна перевищувати 2 % від меншого з них.

Діаметр відбитку визначають за допомогою мікроскопу типу МПБ-2.

Значення числа твердості *HB* встановлюють в залежності від діаметра відбитку у відповідності з стандартом, або, наприклад, по літературі [5].

Твердість по Бринелю за умов випробувань шариком $D$=10 мм, з навантаженням $P$=29420 Н та тривалості витримування під навантаженням від 10 до 15 с позначається цифрами, що характеризують величину твердості, та буквами *HB*, наприклад: 185 *HB*. За інших умов випробувань після букв *HB* вказується умова випробування в наступному порядку: діаметр шарика, навантаження, тривалість витримування під навантаженням. Наприклад: 185 *HB* 5/750/20 – твердість по Бринелю, визначена із застосуванням шарика D=5 мм, під навантаженням 7355 Н, тривалістю витримування 20 с.

## 2. Порядок виконання

1. В табл. 2.3 внести дані твердості деталей (видаються викладачем індивідуально кожному студенту).

Таблиця 2.3 – Результати випробувань зразків

| № досліду | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | … | n |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Твердість, *HB* | | | | | | | | | | |

2. Наведені в табл. 2.3 значення твердості розмістити у зростаючому порядку, тобто

$$HB_1 \le HB_2 \le \ldots \le HB_{n-1} \le HB_n .$$

3. Розрахувати характеристики: середнє арифметичне $\overline{HB}$ і середнє квадратичне відхилення $S$ за формулами (2.1) і (2.2).

4. З ряду (п. 2) вибрати два найбільших $HB_n$ і $HB_{n-1}$ або найменших $HB_1$ і $HB_2$ значень випадкової величини та визначити величину $\lambda$ за формулою (2.4).

5. За методом Ірвіна з табл. 2.1 в залежності від обсягу вибірки $n$ при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ знаходять критичне значення $\lambda_{0,95}$.

6. Виконати порівняння $\lambda$ з табличним значенням $\lambda_{0,95}$. Якщо $\lambda \le \lambda_{0,95}$, то результат, який оцінюється, є випадковим і його треба

залишити. Якщо має місце умова $\lambda \geq \lambda_{0,95}$, то найбільше $HB_n$ або найменше значення $HB_1$ слід відкинути. В цьому випадку після виключення грубої помилки необхідно знову розраховувати характеристики $\overline{HB}$ і $S$ за формулами (2.1) і (2.2).

7. За методом Романовського за допомогою формули (2.5) визначити $t_\alpha$, приймаючи величину $x_i'$, яку було виключено.

8. Порівняти значення $t_\alpha$ із значенням $t_\alpha'$, визначеним за табл. 2.2 для відповідної вибірки $n$.

9. Якщо $t_\alpha \leq t_\alpha'$, то $x_i'$ є випадковим значенням і його відкидати не можна. Якщо ж $t_\alpha \geq t_\alpha'$, то значення $x_i'$, що різко відрізняється, є грубою помилкою і його слід відкинути.

10. При застосуванні методу Романовського, після виключення з вибірки значення $x_i'$, що різко відрізняється, немає необхідності повторного перерахунку характеристик $\overline{HB}$ і $S$.

11. Порівняти результати розрахунків за методом Ірвіна та Романовського. Зробити відповідні висновки.

## 3. Контрольні запитання

1. Що таке вибірка? Назвіть види вибірок, що існують.
2. Що таке анормальний результат?
3. Які можливі причини грубих помилок?
4. Сформулюйте нульову і альтернативну гіпотези для перевірки вибірки на анормальність результату.
5. Назвіть статистичні характеристики вибірки і поясніть їх сутність.
6. В чому полягає сутність методу Ірвіна?
7. В чому полягає сутність методу Романовського?
8. Який з двох методів (Ірвіна або Романовського) слід вважати більш жорстким? Поясніть чому.
9. Які ще є критерії для перевірки вибірки на анормальність результату, крім розглянутих?

**ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3**

# ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ ВИПАДКОВОСТІ ВИБІРКИ І ВІДПОВІДНОСТІ (ЗГОДИ) РОЗПОДІЛУ ВВ НОРМАЛЬНОМУ ЗАКОНУ

Мета роботи – освоїти методики перевірки статистичних гіпотез щодо випадковості вибірки і відповідності розподілу ВВ нормальному закону.

## 1. Основні теоретичні відомості

Перевірка статистичних гіпотез тісно пов'язана с теорією оцінки параметрів розподілу. В практичній і науковій діяльності для того, щоб пересвідчитись у справедливості того чи іншого факту часто прибігають до постановки гіпотез, які можуть бути перевірено на основі даних вибіркового спостереження.

Під *гіпотезою* у широкому розумінні слова слід розуміти деяке наукове передбачення про властивості явищ, що вивчаються і які потребують перевірки і підтвердження.

*Статистичною гіпотезою (H)* називається припущення стосовно параметрів або форми розподілу генеральної сукупності, яке перевіряється на підставі даних вибіркового спостереження.

З визначення статистичної гіпотези витікає, що вона може відноситись або до законів розподілу, або до окремих параметрів розподілу.

Прикладом статистичних гіпотез можуть бути передбаченням про те, що розміри окремих деталей, що отримують при механічній обробці, підпорядковуються нормальному закону розподілу; середні розміри деталей, які виготовляються на однотипному обладнанні цеху, однакові.

У ході перевірки статистичних гіпотез необхідно встановити, чи співпадають результати спостереження з висунутою гіпотезою, чи можна різницю між гіпотезою і результатами спостереження віднести до випадкових або ж ця різниця виникла під впливом яких-небудь систематично діючих причин. У результаті перевірки гіпотеза або приймається, або відкидається.

Найбільш частіше перевіряється припущення про те, що отримана по вибірці величина відрізняється від гіпотетичної (теоретично передбачуваної) або встановленої величини в генеральній сукупності. Для перевірки цього положення висувається гіпотеза про те, що істинна різниця між фактичними і гіпотетичними показаннями дорівнює нулю. У зв'язку з цим гіпотезу, що перевіряємо називають *нульовою* і позначають $H_0$. Нульову гіпотезу ще називають *основною* або *робочою гіпотезою*.

У кожному випадку нульовій гіпотезі протиставляється *альтернативна (конкуруюча) гіпотеза* $H_a$, яка відхиляє нульову гіпотезу. Наприклад, якщо нульова гіпотеза полягає в припущенні, що середній розмір деталі у генеральній сукупності дорівнює 35 мм, то альтернативна гіпотеза може полягати в тому, що середній розмір деталі у генеральній сукупності не дорівнює 35 мм. Зміст гіпотези записується після двох крапок, а сам запис виглядає таким чином:

$$H_0\text{: } \bar{x} = 35;\ H_a\text{: } \bar{x} \neq 35.$$

## 1.1 Перевірка гіпотези випадковості і незалежності спостережень

Для опису і вивчення властивостей генеральної сукупності по виборці з неї необхідно, щоб вибірка була репрезентативною. Репрезентативною ж може бути тільки випадкова вибірка.

Для перевірки гіпотези випадковості вибірки може бути використано два способи: *спосіб послідовних різниць* і *спосіб числа і довжини серій*. Якщо можна допустити, що протягом спостережень центр розподілу величини $x$ поступово змінюється, але дисперсія остається незмінною, то для перевірки гіпотези «випадковості» вибірки більш підходящим є спосіб послідовних різниць. Такий випадок має місце при спостереженнях за розмірами деталей, що обробляються на налаштованому верстаті, коли внаслідок зносу інструмента, нагріву елементів верстата, циклічних похибок багатопозиційних верстатів центр розсіювання поступово зміщується і, таким чином, спостерігається плавна зміна середньої при незмінному стандарті $\sigma$, яке характеризує розсіювання розмірів. Методику щодо реалізації способу послідовних різниць можна знайти в літературі [6, 7]. Ми розглянемо *спосіб числа і довжини серій,* як більш універсальний.

*Спосіб числа і довжини серій.* Є результати замірів випадкової величини $x$ для партії виробів обсягом $n$, записані в порядку їх отримання в процесі проведення спостережень. Результати цих спостережень в партії вважаються випадковими і незалежними один від одного, якщо результат спостереження на будь-якому кроці (в будь-якому опиті) не залежить від результатів раніше проведених спостережень і сам, у свою чергу, не впливає на результати наступних спостережень.

Для перевірки умови випадковості і незалежності можна використовувати *критерій серій*. При цьому проводиться упорядкування вибірки обсягом $n$ – будується варіаційний ряд

$$x_1 \le x_2 \le \dots \le x_{\mathrm{m}} \le \dots \le x_n. \tag{3.1}$$

Обчислюється медіана $x_{\mathrm{med}}$ (середина варіаційного ряду):

– якщо $n$ – непарне

$$x_{med} = x_{\frac{n+1}{2}}; \tag{3.2}$$

– якщо $n$ – парне

$$x_{med} = 0{,}5\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right). \tag{3.3}$$

Кожне значення величини $x$ з ряду, записаного в тому порядку, в якому значення $x$ отримували при проведенні спостережень (дивись попередню вибірку, яку видав викладач), порівнюється з медіаною $x_{\mathrm{med}}$. Якщо при цьому $x \ge x_{\mathrm{med}}$, то ставиться знак «+», а якщо $x < x_{\mathrm{med}}$, то ставиться «–». Послідовність однакових знаків, що стоять поруч, називають серією. В результаті ряд числових значень $x$ , отриманий у порядку проведення спостережень, перетворюється на ряд, що складається з знаків «+» або «–».

Підраховується кількість серій $\nu$.

Визначається розмір найбільш довгої серії $\tau$ (максимальна кількість однакових знаків, що стоять поруч).

Перевіряється гіпотеза про незалежність і випадковість значень *x*. Величина *x* вважається випадковою і спостереження незалежними, якщо виконуються умови $\nu > \nu_{кр}$ і $\tau < \tau_{кр}$

$$\nu_{кр} = 0{,}5\left(n + 1 - z_{\alpha}\sqrt{n-1}\right); \tag{3.4}$$

$$\tau_{кр} = 3{,}32 \cdot \lg(n+1), \tag{3.5}$$

де $z_{\alpha}$ – нормована випадкова величина, яка вибирається за таблицею функції Лапласа для рівня значущості $\alpha$ (табл. 3.1).

Таблиця 3.1 – Значення $z_{\alpha}$ для різних $\alpha$

| α | 0,1 | 0,05 | 0,02 | 0,01 | 0,001 |
|---|---|---|---|---|---|
| $z_{\alpha}$ | 1,64 | 1,96 | 2,33 | 2,58 | 3,29 |

Найбільш часто в техніці приймається рівень значущості $\alpha$, який дорівнює 0,05.

Ці обчислення виконуються для *y* і усіх факторів *x* (якщо їх декілька).

1.2 Перевірка гіпотези відповідності (згоди) опитного розподілу ВВ нормальному закону

Оскільки статистична обробка результатів спостережень (вимірювань) основана на використанні нормального закону розподілу ВВ, необхідно, насамперед, утвердитись в тому, що данні у виборці не суперечать нормальному закону. Це повинно бути зроблено до початку статистичної обробки. Для виконання цієї перевірки існують відповідні критерії [2, 3, 7, 8]. Наприклад використовують критерій $\chi^2$[2, 3, 7], або W [2, 8]. Критерій W є більш потужним, чим $\chi^2$, коли мають обмежену кількість даних і може використовуватись для нормального, логарифмічно нормального і експоненціального розподілів. Критерій W годиться для обсягу *n* вибірки від 3 до 50. Найбільш часто при перевірці рівень значущості $\alpha$ приймається таким, що дорівнює 0,05 .

Результати спостережень, наприклад параметра $x$, розташовують у графі 2 таблиці 3.2 в порядку зростання їх значень згори вниз. У графу 4 таблиці 3.2 записують значення порядкового індексу $j$ для $j$ = 1, 2, ... $e$ в зворотному порядку ( в порівнянні з $i$ ).

Таблиця 3.2 – Форма даних для побудови перевірки згоди розподілу з теоретичним (нормальним) за критерієм W

| i | $x_i$ | $x_i^2$ | $j$ | $a_{n-j+1}$ | $x_{x-j+1}$ - $x_j$ | (5) · (6) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 | $x_1$ | $x_i^2$ | – | – | – | – |
| 2 | $x_2$ | $x_2^2$ | – | – | – | – |
| . | . | . | – | – | – | – |
| $n-e+1$ | $x_{n-e+1}$ | $x_{n-e+1}^2$ | $e$ | $a_{n-e+1}$ | $x_{n-e+1}$- $x_e$ | $a_{n-e+1}$ ($x_{n-e+1}$- $x_e$) |
| . | . | . | . | . | . | . |
| $n-1$ | $x_{n-1}$ | $x_{n-1}^2$ | 2 | $a_{n-1}$ | $x_{n-1} - x_2$ | |
| $n$ | $x_n$ | $x_n^2$ | 1 | $a_n$ | $x_n - x_1$ | |
| – | $\sum_{i=1}^{n} x_i$ | $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ | – | – | – | $\sum_{j=1}^{e} a_{n-j+1}\left(x_{n-j+1} - x_j\right)$ |

При цьому:

– якщо $n$ – парне

$$e = \frac{n}{2}; \tag{3.6}$$

– якщо $n$ – непарне

$$e = \frac{n-1}{2}. \tag{3.7}$$

Значення коефіцієнтів графи 5 таблиці 3.2 приймають за таблицею 3.3. У графу 7 записуються значення добутку величин графи 5 та графи 6.

Визначають характеристики

$$x^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}; \tag{3.8}$$

$$b^2 = [\sum_{j=1}^{e} a_{n-j+1} \cdot \left(x_{n-j+1} - x_j\right)]^2. \tag{3.9}$$

і значення критерію

$$W = \frac{b^2}{x^2}. \qquad (3.10)$$

Порівнюють обчислене значення W з критичним значенням W*, яке приймається за таблицею 3.3.

Таблиця 3.3 – Значення коефіцієнта $a_{n-j+1}$ і критичних величин критерію $W^*$

| j | Коефіцієнт $a_{n-j+1}$ при $n$, що дорівнює | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 |
| 1 | 0,7071 | 0,6872 | 0,6646 | 0,6431 | 0,6052 | 0,5739 | 0,5475 | 0,5251 | 0,5056 |
| 2 | – | 0,1677 | 0,2413 | 0,2801 | 0,3164 | 0,3291 | 0,3325 | 0,3318 | 0,3290 |
| 3 | | – | –- | 0,0875 | 0,1743 | 0,2141 | 0,2347 | 0,2460 | 0,2521 |
| 4 | | | | – | 0,0561 | 0,1224 | 0,1586 | 0,1802 | 0,1939 |
| 5 | | | | | – | 0,0399 | 0,0922 | 0,1240 | 0,1447 |
| 6 | | | | | | – | 0,0303 | 0,0727 | 0,1005 |
| 7 | | | | | | | – | 0,0240 | 0,0593 |
| 8 | | | | | | | | – | 0,0196 |
| 9 | | | | | | | | | – |
| α | Квантиль розподілу критерію $W^*$ | | | | | | | | |
| 0,01 | 0,753 | 0,687 | 0,686 | 0,713 | 0,749 | 0,781 | 0,805 | 0,825 | 0,844 |
| 0,05 | 0,767 | 0,748 | 0,762 | 0,788 | 0,818 | 0,842 | 0,859 | 0,874 | 0,887 |
| 0,10 | 0,789 | 0,792 | 0,806 | 0,826 | 0,851 | 0,869 | 0,883 | 0,895 | 0,906 |

*Примітка.* Такі ж самі обчислення проводяться для $y$ і усіх останніх факторів $x$ (якщо їх декілька).

Якщо W ≥ W*, приймають, що дослідний розподіл відповідає нормальному, і навпаки, якщо W < W*, то не відповідає.

Аналогічно перевіряється розподілення $y$, якщо між ним і розподіленням $x$ передбачають існування зв'язку.

## 2. Порядок виконання

1. Перед виконанням необхідних розрахунків слід ретельно ознайомитись з теоретичною частиною роботи.
2. Необхідно сформулювати нульові і альтернативні гіпотези.

3. Для перевірки гіпотези випадковості і незалежності вибірки за критерієм серій слід побудувати варіаційний ряд у відповідності до вимог умови (3.1).

4. Визначити значення $x_{\mathrm{med}}$ за однією з формул (3.2) або (3.3).

5. Порівняти кожне значення величини $x$ з ряду, записаного в тому порядку, в якому значення $x$ отримували при проведенні спостережень (дивись вибірку, яку видав викладач) з медіаною $x_{\mathrm{med}}$. Якщо при цьому $x \geq x_{\mathrm{med}}$, то ставиться знак «+», а якщо $x < x_{\mathrm{med}}$, то ставиться «–».

6. Підрахувати кількість серій $\nu$.

7. Визначити розмір найбільш довгої серії $\tau$ (максимальна кількість однакових знаків, що стоять поруч).

8. За формулами (3.4) і (3.5) визначити критичні значення $\nu_{кр}$ і $\tau_{кр}$.

9. Виконати порівняння отриманих даних. Величина $x$ вважається випадковою і спостереження незалежними, якщо виконуються умови $\nu > \nu_{кр}$ і $\tau < \tau_{кр}$.

10. Заповнити відповідні графи табл. 3.2.

11. Визначити характеристики за формулами (3.8), (3.9).

12. За формулою (3.10) визначити значення критерію W.

13. Порівняти обчислене значення W з критичним значенням W*, яке приймається за таблицею 3.3.

14. Якщо W ≥ W*, приймають, що дослідний розподіл відповідає нормальному, і навпаки, якщо W < W*, то не відповідає.

15. Робиться загальний висновок стосовно обох критеріїв.

## 3. Контрольні запитання

1. Що таке статистична гіпотеза?
2. Поняття нульової і альтернативної гіпотез.
3. Яка мета перевірки гіпотези випадковості і незалежності вибірки?
4. Яка мета перевірки відповідності (згоди) опитного розподілу ВВ нормальному закону?
5. Що таке медіана варіаційного ряду?

# ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №4
# ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ РІВНОСТІ ДВОХ ВИБІРКОВИХ СЕРЕДНІХ, ДИСПЕРСІЙ І ГІПОТЕЗИ ПРО ПРИНАЛЕЖНІСТЬ ДВОХ ВИБІРОК ДО ОДНІЄЇ ГЕНЕРАЛЬНОЇ СУКУПНОСТІ

Мета роботи – освоїти методики перевірки статистичних гіпотез.

## 1. Основні теоретичні відомості

### 1.1 Перевірка гіпотези рівності двох вибіркових дисперсій

Хай є дві вибірки з нормальної сукупності. Обсяг кожної вибірки дорівнює $n_1$ і $n_2$. Дисперсії цих вибірок відповідно рівні $s_1^2$ і $s_2^2$. Чи можна вважати за наявності деяких відмінностей між величинами $s_1^2$ і $s_2^2$, що дані вибірки належать одній і тій же генеральній сукупності?

Або можна поставити питання так: проведено два опити, з яких один проводився з фактором *A*, а інший – без нього. Кожен опит проводився *n* разів. В результаті обробки статистичних даних отримано, що дисперсія ознаки *x* в опитах з фактором *A* дорівнює величині $s_A^2$, а без нього – $s_0^2$. Чи надає істотного впливу досліджуваний фактор *A* на ознаку *x*? Для відповіді на поставлені питання необхідно провести порівняння дисперсій і оцінити їх відмінність. Порівняння дисперсій проводиться по їх відношенню [7, 9]

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}. \qquad (4.1)$$

У чисельнику завжди ставиться найбільше значення з двох спостережених дисперсій. Отримане значення F зіставляють з критичним значенням $F_{1-\alpha/2}$ для заданого рівня значущості α і числа ступенів свободи $k_1 = n_1 - 1$, $k_2 = n_2 - 1$ [9]. У разі дотримання умови $F \le F_{1-\alpha/2}$ приймають нульову гіпотезу про рівність генеральних дисперсій $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$. В іншому випадку нульова гіпотеза відкидається.

Якщо вибірки беруться з сукупностей, що незначно відрізняються від нормальних, то для порівняння дисперсій можна користуватися критерієм $F$. Але якщо сукупність має розподіл, який значно відрізняється від нормального, то можна порівнювати дисперсії тільки для великих вибірок. У цьому випадку за критерій оцінки може бути взято відношення [7]

$$t_s = \frac{\left| s_1 - s_2 \right|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{2n_1} + \frac{S_2^2}{2n_2}}}. \tag{4.2}$$

Якщо це відношення $t_s \geq 3$, то розбіжність між дисперсіями істотна; якщо $t_s < 3$ – розбіжність неістотна.

### 1.2 Перевірка гіпотези рівності двох вибіркових середніх

Припустимо, що з однієї і тієї ж генеральної сукупності взято дві вибірки, які для величини $x$ дають середні $\overline{X}_1$ і $\overline{X}_2$, відмінні одна від іншої. Потрібно взнати, випадково чи не випадково вони відрізняються одна від одної. Це питання має важливе значення при проведенні дослідів. Якщо розбіжність між $\overline{X}_1$ і $\overline{X}_2$ буде істотною, то це може вказати на помилки в дослідах або методиці їх виконання, тоді як випадковість їх розбіжності вказує на відсутність таких помилок.

Подібне питання виникає і при дослідженні впливу різних факторів на досліджувану ознаку. Якщо досліди з фактором $A$ і без нього дали відмінні один від одного $\overline{X}_1$ і $\overline{X}_2$, то при випадковій відмінності їх значень, очевидно, що фактор $A$ не впливає на досліджувану ознаку і, навпаки, впливає при істотній розбіжності між $\overline{X}_1$ і $\overline{X}_2$. Нарешті, може виникнути на практиці і таке питання: чи належать дві вибірки до однієї і тієї ж генеральної сукупності. І це питання можна вирішити, якщо порівняти вибіркові середні $\overline{X}_1$ і $\overline{X}_2$ і оцінити їх розбіжність. Якщо вибірки взято з однієї і тієї ж генеральної сукупності, то розбіжність між $\overline{X}_1$ і $\overline{X}_2$ буде випадковою, і, навпаки, воно буде істотним, коли вибірки не будуть належати до однієї і тієї ж сукупності.

Перевірка гіпотези про рівність середніх значень проводиться за допомогою критерію Стьюдента ($t$ - критерій). Критерій Стьюдента застосовується для порівняння середніх значень двох нормально розподілених сукупностей при невідомих, але рівних дисперсіях $(\sigma_1^2 = \sigma_2^2)$. Для цього за вибірковими середніми $\overline{X}_1$ і $\overline{X}_2$ і вибірковими дисперсіями $s_1^2$ і $s_2^2$ при обсязі вибірок $n$ > 25 обчислюють $t$ - критерій за формулою [9]

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}. \tag{4.3}$$

S визначають за формулою

$$S = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)}}, \tag{4.4}$$

де $n_1$ і $n_2$ – обсяги вибірок.

Отримане значення t - критерію порівнюють з табличним для рівня значущості α і числа ступенів свободи $k = n_1 + n_2 - 2$. Якщо $|t| \le t_{\alpha;\ k}$ [9], то нульову гіпотезу про рівність середніх приймають. В іншому випадку $\overline{X}_1 \neq \overline{X}_2$.

При обсязі вибірки n < 25 значення $t$ - критерію обчислюється за формулою, наведеною в [7].

При використанні критерію Стьюдента попередньо перевіряють гіпотезу рівності дисперсій $\sigma_1^2$ і $\sigma_2^2$ [9].

У разі, коли $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ величину t обчислюють за такою формулою

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}. \tag{4.5}$$

Для визначення числа ступенів свободи використовують залежність

$$\frac{1}{k} = \frac{c^2}{n_1 - 1} + \frac{(1-c)^2}{n_2 - 1}, \tag{4.6}$$

де

$$c = \frac{\frac{S_1^2}{n_1}}{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}. \tag{4.7}$$

При $| t | \le t_{\alpha;\, k}$ за табл. 8 [9] маємо $\overline{X}_1 = \overline{X}_2$. Якщо ж $| t | > t_{\alpha;\, k}$, маємо $\overline{X}_1 \ne \overline{X}_2$.

### 1.3 Перевірка гіпотези про приналежність двох вибірок до однієї і тієї ж генеральної сукупності (критерій Уілкоксона)

Нехай є дві серії незалежних випробувань однорідних величин *x* і *y*. При цьому спостережені значення $x_i$ і $y_i$ дають різні значення середніх ($\overline{X} \ne \overline{Y}$) або виявляють різні розсіювання. Виникає питання, чи можна вважати ці розбіжності істотними або вони носять випадковий характер. Наприклад, з двох верстатів, налаштованих на обробку одних і тих же деталей, взяті дві поточні вибірки. Середні та дисперсії цих вибірок відрізняються один від одного. При цьому закон розподілу генеральних сукупностей, з яких взято вибірки, невідомий. Потрібно перевірити, чи забезпечують обидва верстата однакову точність обробки.

Нульова гіпотеза в даному випадку буде полягати в тому, що функції розподілу *x* і *y* тотожні, тобто вибірки належать одній і тій же генеральній сукупності. Для перевірки цієї нульової гіпотези може бути використаний критерій Уілкоксона, заснований на числі інверсій. Під інверсіями в даному випадку розуміється наступне. Спостережені значення *x* і *y* у двох вибірках розташовують у загальну послідовність у порядку зростання, наприклад, у вигляді

$$y_1 \;\; y_2 \;\; x_1 \;\; x_2 \;\; y_3 \;\; y_4 \;\; y_5 \;\; x_3 \;\; y_6 \;\; x_4 \tag{4.8}$$

де $x_1, \ldots, x_4$ – члени першої вибірки, а $y_1, \ldots, y_6$ – члени другої вибірки.

Якщо якому-небудь значенню $x$ передує деякий $y$, то кажуть , що ця пара дає інверсію. Якщо деякому значенню $x_m$ передує $n$ значень $y$, то це означає, що $x_m$ має $n$ інверсій. Наприклад, у нашій послідовності $x_1$ дає дві інверсії, $x_2$ – те ж дві інверсії, $x_3$ – п'ять інверсій і $x_4$ – шість інверсій. Всього інверсій в нашій послідовності буде

$$u = 2 + 2 + 5 + 6 = 15.$$

Будується область допустимих значень $u$

$$\bar{u} - \sigma_u z_{1-\alpha/2} < u < \bar{u} + \sigma_{1-\alpha/2} \tag{4.9}$$

за умови, що при обсягах $n > 10$ і $m > 10$ число інверсій розподілено за нормальним законом з математичним сподіванням

$$\bar{u} = \frac{mn}{2} \tag{4.10}$$

і дисперсією

$$\sigma_u^2 = \frac{mn}{15}(m + n + 1), \tag{4.11}$$

тут $z_{1-\alpha/2}$ – квантиль стандартного нормального розподілу, що знаходиться за табл. 1 [9].

Нульова гіпотеза $H_0$ приймається, якщо величина $u$ потрапляє в область допустимих значень. В іншому випадку – гіпотеза $H_0$ відкидається.

### 1.4 Перевірка гіпотези про рівність (однорідність) ряду дисперсій

Нехай маємо $m$ вибірок не рівних обсягів $n_i$, взятих з однієї або $m$ генеральних сукупностей, які мають нормальні розподіли. При цьому дисперсії цих сукупностей мають однакові значення, тобто

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \ldots = \sigma_m^2 = \sigma^2$, а математичні очікування можуть бути і не рівні один одному.

Дисперсії вибірок $S_1^2, S_2^2, \ldots, S_m^2$, обчислені за формулою

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \tag{4.12}$$

дещо відрізняються один від одного за величиною. Потрібно перевірити гіпотезу про те, що це розходження дисперсій вибірок носить випадковий характер, і, отже, дисперсії генеральних сукупностей $\sigma_i^2$, з яких взято вибірки, рівні між собою, тобто $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_m^2 = \sigma^2$.

*Критерій Бартлета*. Однорідність (рівність ) дисперсій ряду ($m$) вибірок з нормально розподілених сукупностей оцінюється за допомогою критерію Бартлета у разі однакової або неоднакової кількості елементів в окремих вибірках. Для цього обчислюють величину

$$\chi^2 = \frac{2{,}3026}{c}\left[\left(\sum_{i=1}^{m} n_i - m\right)\lg S^2 - \sum_{i=1}^{m}(n_i - 1)\lg S_i^2\right], \tag{4.13}$$

де

$$c = 1 + \frac{1}{3(m-1)}\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} n_i - m}\right); \tag{4.14}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}(n_i - 1).S_i^2}{\sum_{i=1}^{m} n_i - m}, \tag{4.15}$$

$S_i^2$ – вибіркова дисперсія, що визначається за формулою

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \tag{4.16}$$

Якщо значення $\chi^2 \le \chi_\alpha^2$ для рівня значущості $\alpha$ і числа ступенів свободи k = $m$ – 1 (табл. 9 додатку [9]), то гіпотеза однорідності ряду дисперсій підтверджується. У разі $\chi^2 > \chi_\alpha^2$ маємо $\sigma_1^2 \ne \sigma_2^2 \ne \ldots \ne \sigma_m^2$.

*Критерій Кохрена.* У порівнянні з критерієм Бартлета критерій Кохрена дещо менш потужний, але більш простий. Він використовується в разі рівності кількості елементів у всіх $m$ вибірках.

Перевірка гіпотези однорідності дисперсій полягає в обчисленні відносини

$$G_{\max} = \frac{\lfloor S_i^2 \rfloor_{\max}}{\sum_{i=1}^{m} S_i^2} \tag{4.17}$$

і порівнянні його з критичним $G_\alpha$ (табл. 10 додатку [9]) для рівня значущості $\alpha$ і числа ступенів свободи $k = m$.

Гіпотеза однорідності ряду дисперсій приймається, якщо $G_{\max} \le G_\alpha$.

## 2. Порядок виконання

1. Перевірку усіх вище розглянутих статистичних гіпотез слід починати з формулювання нульової гіпотези.
2. У відповідності з наданими рекомендаціями слід визначити значення відповідних критеріїв.
3. У наведеній довідковій літературі знайти критичні значення відповідних критеріїв.
4. Виконати порівняльну оцінку значень критеріїв, що отримали в результаті розрахунків з критичними значеннями.
5. Зробити висновок стосовно того, приймається нульова гіпотеза або вона відкидається і, як наслідок, приймається альтернативна.

## 3. Контрольні запитання

1. Які цілі переслідує перевірка статистичних гіпотез?
2. Навести конкретні приклади з практики коли необхідно використовувати той чи інший критерій.

**ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №5**
# ДОСЛІДЖЕННЯ ЗВ'ЯЗКУ МІЖ ДВОМА РЯДАМИ ВИМІРЮВАНЬ. ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ МЕТОДОМ НАЙМЕНЬШИХ КВАДРАТІВ

Мета роботи – ознайомитися з методикою побудови, аналізу та розрахунку числових характеристик зв'язку між ВВ.

## 1. Основні теоретичні відомості

Під кореляційним аналізом розуміють дослідження закономірностей між явищами (ознаками), які залежать від багатьох, іноді невідомих факторів.

Зв'язок між ознаками може бути функціональним (повний) і кореляційним (статистичний).

Функціональним називають такий зв'язок між ознаками, при якому кожному значенню однієї змінної (аргументу) відповідає суто відповідне значення другої змінної (функції).

Наприклад, площа кола ($S = \pi R^2$) і довжина окружності ($L = 2\pi R$) повністю визначаються радіусом $R$, площа квадрата – його стороною і т.п.

В техніці, на підприємстві, в соціально-економічних явищах функціональні зв'язки між ознаками зустрічаються рідко. Тут частіше доводиться мати справу з такими зв'язками між змінними величинами, при яких числовому значенню однієї з них відповідають декілька значень інших. Такий зв'язки між ознаками одержав назву кореляційного (статистичного) зв'язку. Прикладом кореляційного зв'язку може бути взаємозв'язок між рівнем налаштування технологічного процесу і значенням ознаки якості деталі. Очевидно, цей зв'язок не однозначний. Кожному рівню налаштування верстату відповідає цілий ряд значень ознаки якості, розсіювання яких залежить від дії багатьох факторів, врахувати які неможливо (коливання припуску на обробку, коливання твердості заготовок, коливання положення заготовок в пристосуванні, затуплення інструменту та інше). Однак із зміною рівня налаштування відповідним чином змінюється середнє арифметичне значення ряду ознаки якості [1]. Іншим прикладом кореляційного зв'язку може бути взаємозв'язок між похибкою заготовки і похибкою готової деталі.

Кореляційний зв'язок є неповним, він проявляється при великій кількості спостережень, при порівнянні середніх значень результативного і факторного ознаку. Він виражається відповідними математичними рівняннями.

Відрізняють прямолінійний і криволінійний, прямий і зворотній, простий (зміна взаємозв'язків між двома ознаками) і множинний (зміна взаємозв'язків між трьома і більшою кількістю ознаку) кореляційні зв'язки.

Взагалі за допомогою методу кореляційного аналізу вирішуються дві основні задачі:

1) визначення форми і параметрів рівняння зв'язку;

2) вимірювання тісноти зв'язку.

Перша задача вирішується знаходженням рівняння зв'язку і визначенням його параметрів. Друга – за допомогою різних показників тісноти зв'язку (коефіцієнта кореляції, індексу кореляції, кореляційного відношення та ін.) [10].

Щоб попередньо оцінити наявність кореляційного зв’язку між ознаками *x* і *y*, наносять крапки на плоскості і отримують кореляційне поле. За тіснотою групування крапок навколо прямої або кривої лінії, за нахилом лінії можна візуально судити про наявність кореляційного зв’язку.

Цей метод застосовується у виробництві й на різних стадіях життєвого циклу продукції для з'ясування залежності між показниками якості й основними факторами виробництва. При статистичному контролі якості на виробництві він називається діаграмою розкиду.

Діаграма розкиду – інструмент, що дозволяє визначити вид і тісноту зв'язку між парами відповідних змінних. Ці дві змінні можуть відноситися:

– до характеристики якості і фактору, що впливає на неї;

– до двох різних характеристик якості;

– до двох факторів, що впливають на одну характеристику якості.

При наявності кореляційної залежності між двома факторами значно полегшується контроль процесу з технологічної і економічної точок зору.

Діаграма розкиду в процесі контролю якості використовується також для виявлення причинно-наслідкових зв'язків показників якості і факторів, що впливають на них.

На рис 5.1 зображено характерні типи кореляційних полів (діаграм розкиду). З рис. 5.1, а, б, г видно, що між $x$ і $y$ існує певний зв'зок, а на рис. 5.1, в такого зв'язку не спостерігається.

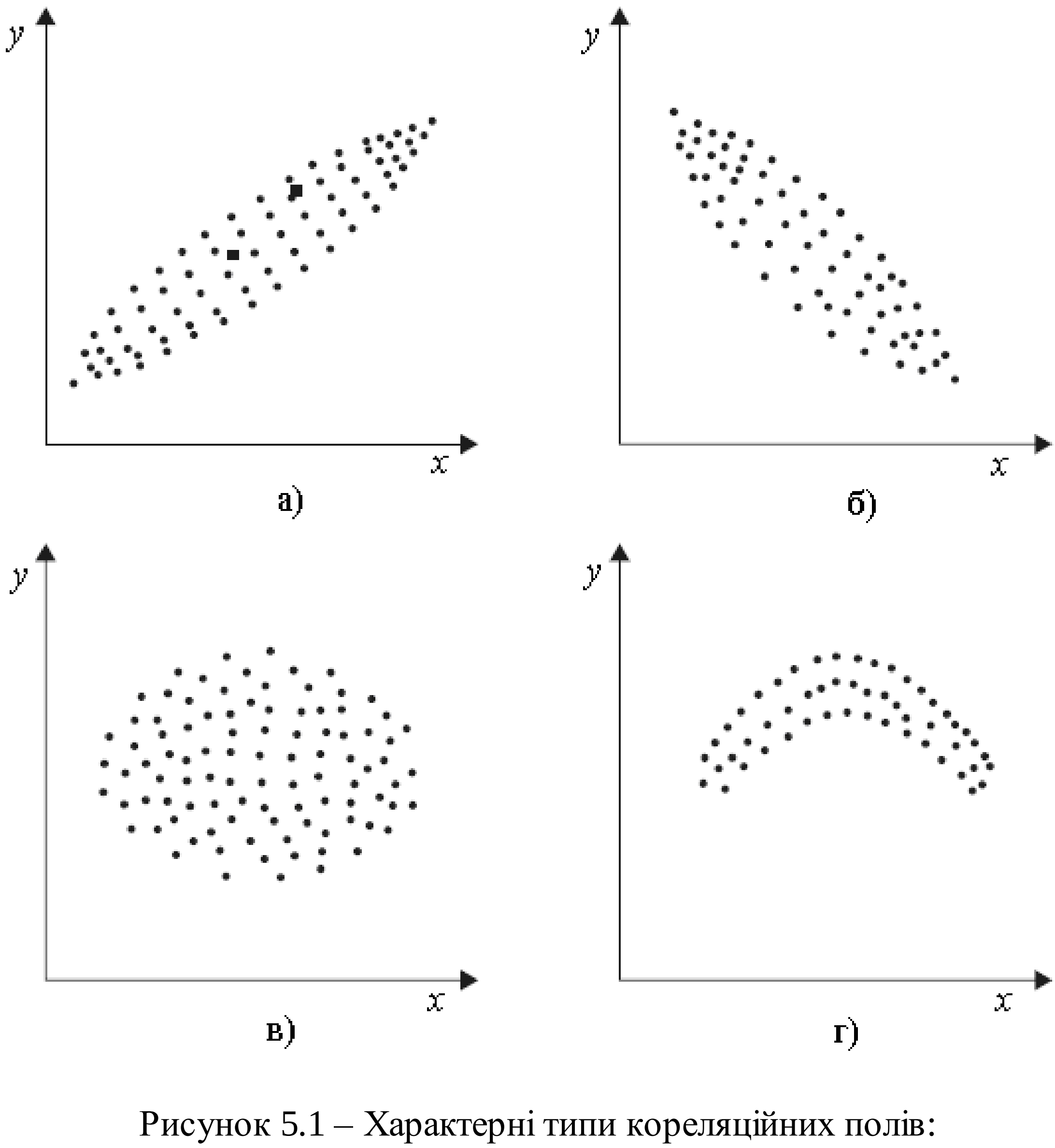


Рисунок 5.1 – Характерні типи кореляційних полів:
а) позитивна кореляція; б) негативна кореляція;
в) відсутність кореляції; г) нелінійна кореляція

По отриманих експериментальних крапках можуть бути визначені й числові характеристики зв'язку між розглянутими випадковими величинами: коефіцієнт кореляції й коефіцієнти регресії.

1.1 Дослідження зв'язку між двома рядами вимірювань (парна кореляція)

Однією з задач любого дослідження являється визначення причинно-наслідкових зв'язків між явищами, тобто встановлення закономірностей впливу одних вимірювань на інші. В умовах статистичного розсіювання результатів вимірювань прямий функціональний зв'язок через експериментальні крапки втрачає глузд, так як і окремі результати, і середні значення «пливуть» в деякій області значень. Для виключення суб'єктивних оцінок при вирішенні цих питань використовують методи кореляційного аналізу. В окремому випадку вивчення зв'язку між двома вимірюваними величинами розраховують коефіцієнт парної кореляції $r$ за наступною формулою

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_x S_y}}, \tag{5.1}$$

де $S_x$, $S_y$, $S_{xy}$ визначаються відповідно за формулами

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2, \tag{5.2}$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \bar{y}\right)^2, \tag{5.3}$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right), \tag{5.4}$$

де $n$ – число пар даних;

$S_x$, $S_y$ – середні квадратичні відхилення окремого виміру величин $x$ і $y$;

$\bar{x}$, $\bar{y}$ – середні арифметичні значень $x$ і $y$;

$x_i$ і $y_i$ – числові значення випадкових величин $x$ і $y$ в $i$-тому досліді;

$S_{xy}$ – коваріація.

Коефіцієнт кореляції може мати значення в діапазоні $-1 \le r \le +1$. У випадку сильної позитивної кореляції досягається значення, близьке до +1, а при сильній негативній кореляції досягається значення, близьке до – 1. При $r$ = 1 усі дані будуть лежати на прямій, зв'язок не викликає сумніву. Якщо $r$ = 0 – кореляційний зв'язок відсутній. При проміжних значеннях $r$ необхідно перевіряти, чи суттєво відрізняється від нуля знайдене значення коефіцієнта кореляції, тобто чи не є ознаки $x$ і $y$ незалежними.

## 1.2 Побудова математичної моделі методом найменших квадратів

Після того, як встановлено, що зв'язок між $x$ і $y$ існує, його визначають у формі рівняння. В умовах великої кількості експериментальних крапок і їх розкиду залежність $y = f(x)$ повинна проходити найбільш ймовірним образом між експериментальними крапками.

Аналіз нормального закону розподілу показує, що найбільш ймовірне положення апроксимуючої функції таке, при якому сума квадратів відхилень експериментальних крапок від значень $y$ функції, яку шукаємо, при відповідних значеннях $x$ буде мінімальною. Цю умову можна записати у вигляді

$$\sum (y_i - \overline{y})^2 = \min, \tag{5.5}$$

де $y_i$ – фактичні ординати поля;

$\overline{y}$ – середнє значення ординати.

Середня лінія кореляційного поля називається лінією регресії. Найбільш поширеною є прямолінійна кореляція. Отже поле кореляції апроксимують рівнянням прямої, а лінію регресії – рівнянням регресії.

Рівняння регресії показує залежність між результативним показником $y$ і незалежними факторами $x_1$, $x_2$ і т.д. Якщо незалежна змінна одна, то мова йде про парну регресію. Якщо ж декілька, то використовується поняття множинної регресії.

Рівняння парної регресії можна представити у вигляді

$$y = a + bx, \tag{5.6}$$

де $a$ – вільний член.

$b$ – коефіцієнт регресії.

Параметри $a$ і $b$ знаходять шляхом застосування методу найменших квадратів [1, 2, 7, 10], розв'язуючи систему рівнянь. Цей метод реалізується в декілька етапів.

Знаходять за наявними даними $\overline{y}$ і $\overline{x}$ за формулами

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \tag{5.7}$$

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{5.8}$$

Підраховують величини $S_x$ і $S_{xy}$ за формулами (5.2) та (5.4).

Знаходять значення невідомих параметрів рівняння (5.6) $b$ та $a$ за формулами

$$b = \frac{S_{xy}}{S_x}, \tag{5.8}$$

$$a = \overline{y} - b\overline{x}. \tag{5.9}$$

Після отримання рівняння регресії виконують його перевірку на адекватність за $F$-критерієм Фішера [1, 3, 7].

Побудову рівняння регресії лінійного або квадратичного виду можливо виконати і з використанням комп'ютерних програм. У MS Excel дана задача може розв'язуватись різними шляхами, одним з найпростіших є наступний:

1. Виділяється ряд даних і натискається кнопка *побудови діаграми*.

2. В мастері побудови діаграм вибрати ***Стандартні***, тип: ***Крапкова*** і натискаючи кнопку ***Готово*** – отримуєте діаграму попередніх даних.

3. В меню ***Діаграма*** виберіть команду ***Добавити лінію тренда.*** Excel виведе на екран окно діалогу ***Лінія тренда***.

4. В окні діалогу ***Лінія тренда*** вибираєте ***Тип*** рівняння – лінійне або поліноміальне другого ступеня. На вкладці ***Параметри*** встановити:

4.1 Показувати рівняння на діаграмі.

4.2 Помістити на діаграму величину достовірності апроксимації (R^2) і натисніть ОК.

Поставлена задача виконана – на екрані монітора ви побачите рівняння регресії і графічне представлення попередніх даних.

MS Excel представляє також декілька вбудованих функцій для роботи з лінійною і експоненціальною регресіями. Ці функції вводяться у вигляді формули масиву і повертають масив результатів.

## 2. Порядок виконання

1. Для попередньої оцінки наявності зв'язку між величинами $x$ і $y$ слід побудувати кореляційне поле.

2. У разі наявності зв'язку між двома ознаками за формулою (5.1) розрахувати коефіцієнт кореляції і оцінити тісноту цього зв'язку.

3. Якщо поле кореляції апроксимується прямою лінією за формулами (5.8) і (5.9) розрахувати невідомі параметри $b$ та $a$ і записати рівняння регресії у вигляді (5.6).

4. За отриманим рівнянням регресії для двох значень ознаки $x$ визначити відповідні значення ознаки $y$ і нанести крапки з цими координатами на кореляційне поле, після чого провести через них лінію регресії.

## 3. Контрольні запитання

1. Що таке кореляційний зв'язок?
2. Задачі кореляційного аналізу.

3. Що таке коефіцієнт кореляції?
4. Які значення може приймати коефіцієнт кореляції?
5. Яка лінія називається лінією регресії?
6. В чому полягає сутність методу найменших квадратів?

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Колкер Я.Д. Математический анализ точности механической обработки деталей / Колкер Я.Д. – К.: Техника, 1976. – 200 с. – (Математика и ее применение).

2. Кацев П.Г. Статистические методы исследования режущего инструмента / Карцев П.Г. – [2-е изд., перераб. и доп.] – М.: Машиностроение, 1990. – 256 с.

3. Степнов М.Н., Шаврин А.В. Статистические методы обработки результатов механических испытаний. Справочник / Степнов М.Н., Шаврин А.В. – [2-е изд. испр. и доп.] – М.: Машиностроение, 2005. – 400 с.

4. Маркин Н.С. Основы теории обработки результатов измерений: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. – М.: Издательство стандартов, 1991. – 176 с.

5. Ксетин П.П. Физико-механические испытания металлов, сплавов и неметаллических материалов / Ксетин П.П. – М.: Машиностроение, 1990. – 256 с.

6. Румшинский Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента / Румшинский Л.З. – М.: Наука, 1971. – 192 с.

7. Солонин И.С. Математическая статистика в технологии машиностроения /. Солонин И.С. – [2-е изд., перераб. и доп.] – М.: Машиностроение, 1972. – 216 с.

8. Рего К.Г., Приходько Л.И. Метрологическая обработка результатов технических измерений: Справочное пособие. – К.: Техніка, 1987. – 128 с.

9. РД 50-398-83 Методические указания: Расчеты и испытания на прочность в машиностроении. Методы механических испытаний. Планирование механических испытаний и статистическая обработка результатов. – М.: Изд-во стандартов, 1984. – 200 с.

10. Мармоза А.Т. Практикум по математической статистике: Учеб. Пособие. – К.: Выща шк., 1990. – 191 с. Навчальне видання

Методичні вказівки
до лабораторних робіт
з дисципліни «Математична обробка результатів вимірювань»
для студентів за спеціальностями 015.13 «Професійна освіта» (Метрологія, стандартизація та сертифікація) та 015.20 «Професійна освіта» (транспорт), освітньо-кваліфікаційний рівень – бакалавр

Упорядник: ЦИБУЛЬСЬКИЙ Вадим Анатолійович

Відповідальний за випуск Подригало М.А.

Редактор

Підписано до друку Формат 60х84 1/16. Папір тип. №
Віддруковано на ризографі Умовн.друк.арк 2,5 Обл.вид.арк. 1,2 Замовлення № Тираж 25 прим.

*Адреса редакції видавця та поліграфпідприємства*

ХНАДУ, 61002, Харків, вул. Ярослава Мудрого, 25

Віддруковано видавництвом Харківського національного автомобільно-дорожнього університету