

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ В ВИДЕ
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ. МОДЕЛИ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ**



Математическая модель в виде одного или нескольких обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) широко используются при изучении переходных процессов в системах автоматического регулирования (САР), при описании процессов движения (потoki, частицы, механические элементы).

В простейшем случае модель может иметь вид линейного дифференциального уравнения n -го порядка:

$$a_n \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = f(t)$$

или системы дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \dots, x_n);$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, \dots, x_n);$$

.....

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \dots, x_n).$$

Модель, заданная в виде дифференциальных уравнений, должна включать в себя необходимый **набор начальных условий**:

$$x(0) = C_0, \quad x'(0) = C_1, \quad x''(0) = C_2, \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = C_{n-1}$$

или $x_1(0) = C_1, \quad x_2(0) = C_2, \dots, \quad x_n(0) = C_n.$

- Исследование моделей, заданных в виде обыкновенных дифференциальных уравнений, осуществляется **аналитическими и численными** методами.
- Наиболее полными являются **аналитические решения**, обеспечивающие всесторонний анализ полученных результатов. Но такие решения получены лишь для ограниченного числа дифференциальных уравнений.
- Численные методы решения позволяют найти лишь **конкретные значения изучаемой функции при заданной комбинации исходных данных**. Для анализа модели можно использовать некоторую совокупность решений.

В качестве простейшего примера математической модели механической системы может быть рассмотрена модель движения груза массой m , закрепленного на вертикальной стенке с помощью пружины жесткостью C и совершающего колебательное движение вдоль оси x в среде с вязкостью ν (Рис. 2.10).

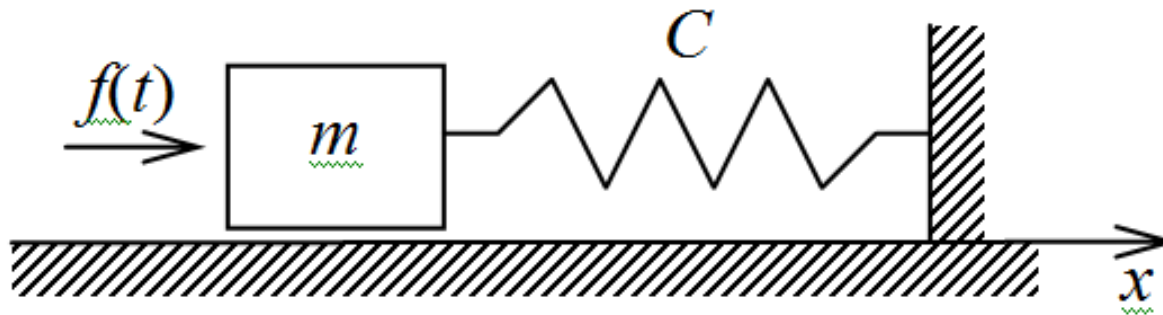


Рис. 2.10

Возмущающая сила, вызывающая колебания, зависит от времени $f(t)$. Наряду с возмущающей силой $f(t)$ на груз действует сила инерции $m \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$, сила вязкого трения $\nu \frac{dx(t)}{dt}$, усилие пружины $\frac{1}{C} x(t)$. Все эти силы тормозят движение груза.

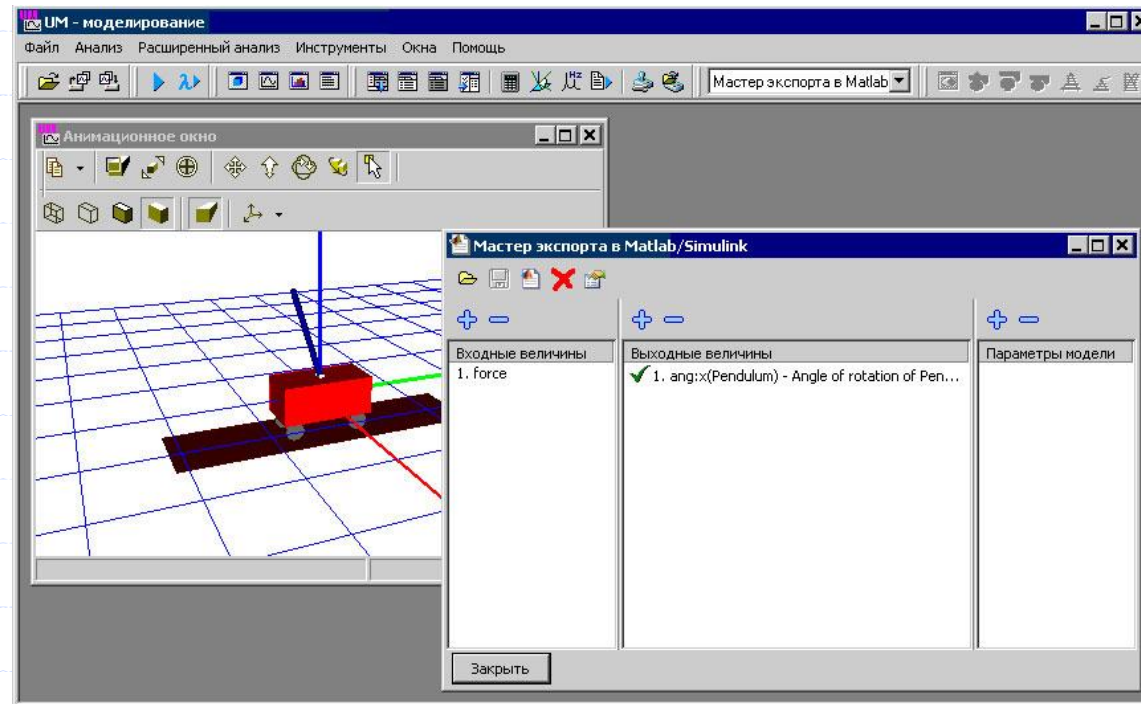
Согласно принципу Даламбера сумма всех сил, действующих на груз должна равняться нулю:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + v \frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{C} x(t) - f(t) = 0. \quad (2.18)$$

Начальные условия характеризуют начальное положение и начальную скорость груза:

$$x(0) = x_0; \quad x'(0) = 0. \quad (2.19)$$

Уравнение (2.18) совместно с начальными условиями (2.19) представляет собой математическую модель рассматриваемой механической системы.



МОДЕЛИ, ЗАДАННЫЕ В ВИДЕ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Особенностью таких задач является то, что изучаемые параметры изменяются не только во времени, но и зависят от координат x, y, z рассматриваемого пространства. Такие модели называются нестационарными. Модели, в которых параметры не зависят от времени, называются стационарными.

Уравнениями в частных производных описываются колебания элементов конструкции и поля напряжений, возникающих при работе этих элементов.

Линейное дифференциальное уравнение в частных производных имеет вид

$$a_0 \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t} + a_1 \frac{\partial \Phi(t)}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \Phi(t)}{\partial x_2} + \dots + a_k \frac{\partial \Phi(t)}{\partial x_k} = f(x_1, x_2, \dots, x_k, t)$$

Математическая модель, описанная дифференциальными уравнениями в частных производных, должна включать в себя необходимые для решения задачи краевые условия:

1. Должна быть задана область D , ограниченная поверхностью (на плоскости – кривой) Γ , в которой определяется решение.
2. Должны быть заданы условия на границе Γ этой области.

В случае нестационарного поля эти граничные условия, так же как и сама область могут меняться во времени.

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ МОГУТ БЫТЬ 1-ГО, 2-ГО И 3-ГО РОДА:

а) Граничные условия 1-го рода предусматривают задание на границе величины искомой функции:

$$\Phi|_{\Gamma} = f_1(\Gamma) \text{ – для стационарного поля;}$$

$$\Phi(t)|_{\Gamma} = f_1(\Gamma, t) \text{ – для нестационарного поля.}$$

б) Граничные условия 2-го рода – предусматривают задание производной искомой функции:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right|_{\Gamma} = f_2(\Gamma) \text{ – для стационарного поля;}$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(t) \right|_{\Gamma} = f_2(\Gamma, t) \text{ – для нестационарного поля.}$$

в) Граничные условия 3-го рода – предусматривают комбинации функции и ее производной:

$$\left(a\Phi + b \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) \Big|_{\Gamma} = f_3(\Gamma) \text{ – для стационарного поля;}$$

$$\left(a(t)\Phi(t) + b(t) \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(t) \right) \Big|_{\Gamma} = f_3(\Gamma, t) \text{ – для нестационарного поля.}$$

3. Для нестационарных полей должны быть заданы одно или два начальных условия, характеризующих состояние поля в начальный момент времени:

$$\Phi(x_i)|_{t=0} = f_4(x_i);$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t}(x_i) \right|_{t=0} = f_5(x_i), \quad (i = 1, 2, 3).$$

Здесь x_i – координаты пространства.

Совокупность уравнений и краевых (и начальных) условий полностью определяет модель и позволяет провести ее исследование.

Решение часто задается в виде семейств изолиний $\Phi = \text{const}$ (Рис. 2.11).

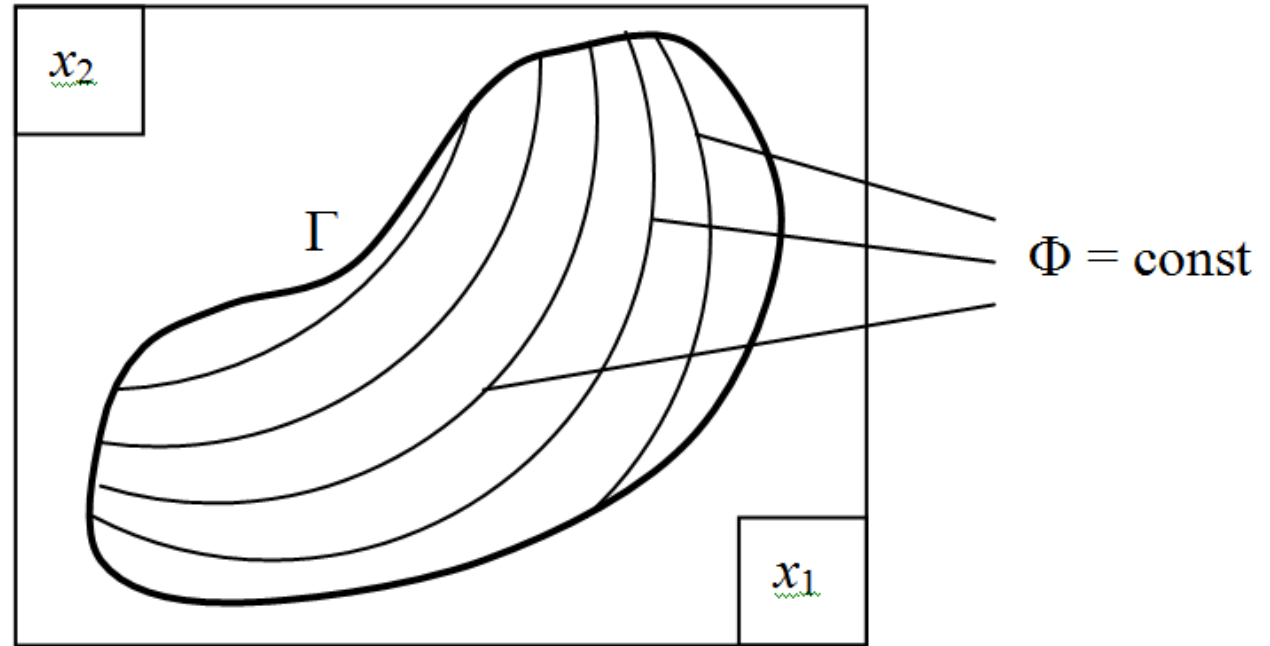
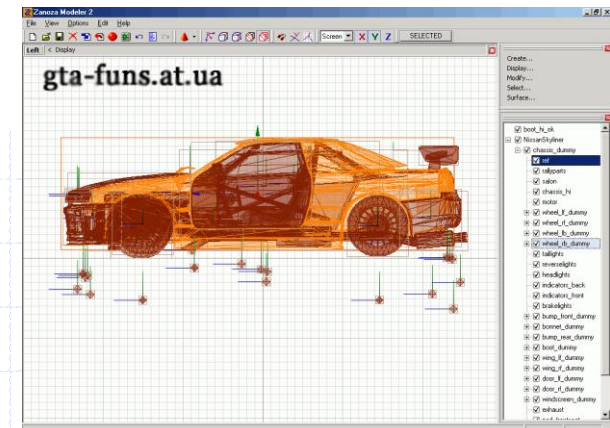


Рис. 2.11



В качестве примера рассмотрим хорошо изолированный металлический прут, нагреваемый с одной стороны. С другой стороны помещен измеритель температуры (Рис. 2.12). Величина подогрева $x(t)$ в момент времени t является входным сигналом, а измеряемая на другом конце температура $y(t)$ – выходным сигналом.

Обозначим через ξ расстояние от измерителя до точки прутка. Температура в этой точке z будет описываться функцией вида

$$z = z(t, \xi).$$

Уравнение теплопроводности для одномерного случая для определения функции z будет иметь вид:

$$\frac{\partial z(t, \xi)}{\partial t} = K \frac{\partial^2 z(t, \xi)}{\partial \xi^2},$$

где K – коэффициент теплопроводности.

Начальным условием в данном случае является начальное распределение температуры (при $t = 0$) по прутку: $z(0, \xi) = \varphi(\xi)$.

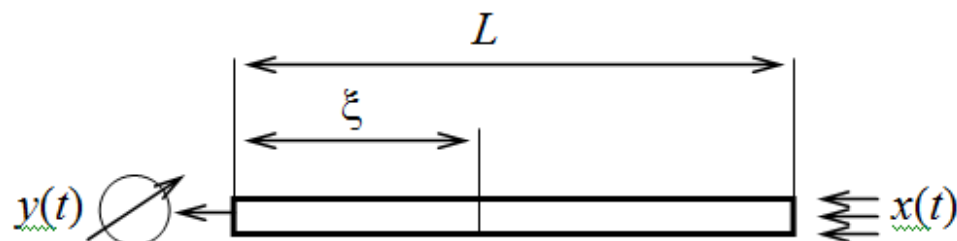
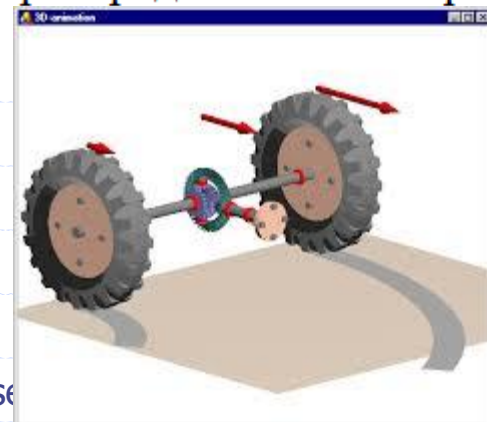


Рис. 2.12



Граничные условия определяются тремя условиями:

а) Нагрев прутка на правом конце

$$\left. \frac{\partial z(t, \xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=L} = Kx(t).$$

б) На левом конце подвод тепла отсутствует

$$\left. \frac{\partial z(t, \xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0.$$

в) Показания на измерителе температур ($\xi = 0$) в момент времени t определяется следующим выражением

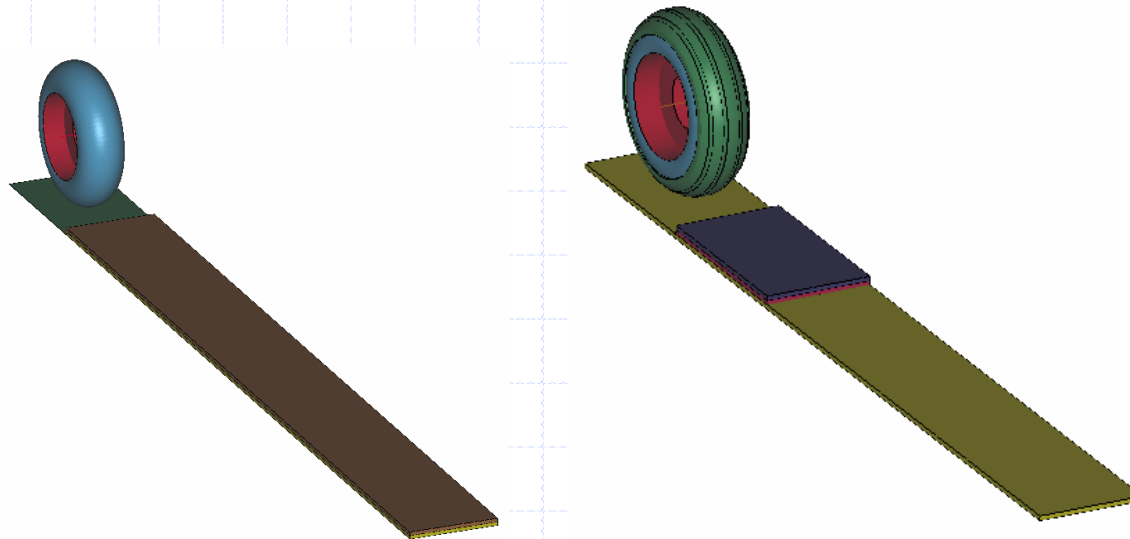
$$z(t, 0) = y(t).$$

✓ Таким образом, для вычисления температуры на расстоянии L от измерителя по формуле для $y(t)$ необходимо проинтегрировать дифференциальное уравнение с учетом начальных и граничных условий, т.е. получить функцию $z(t, \xi)$.

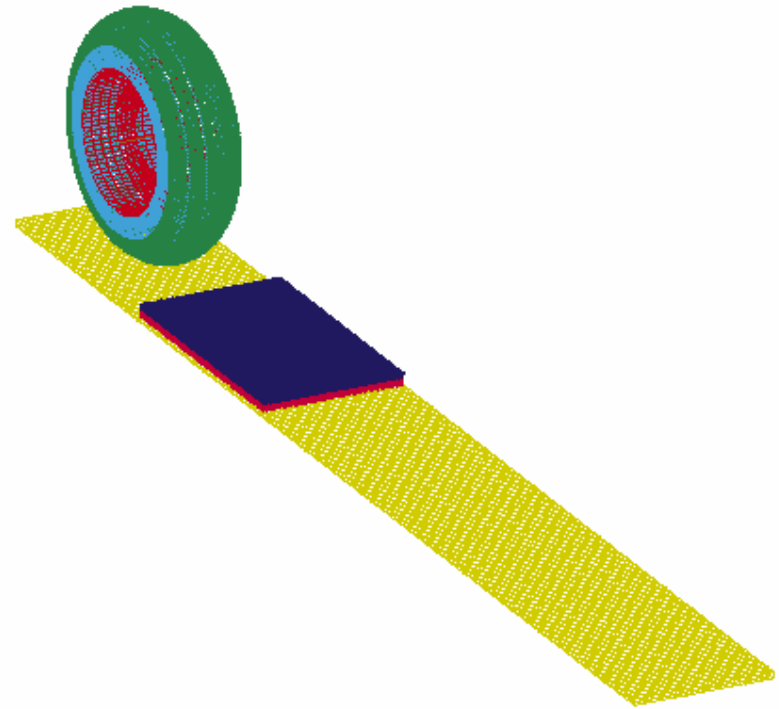
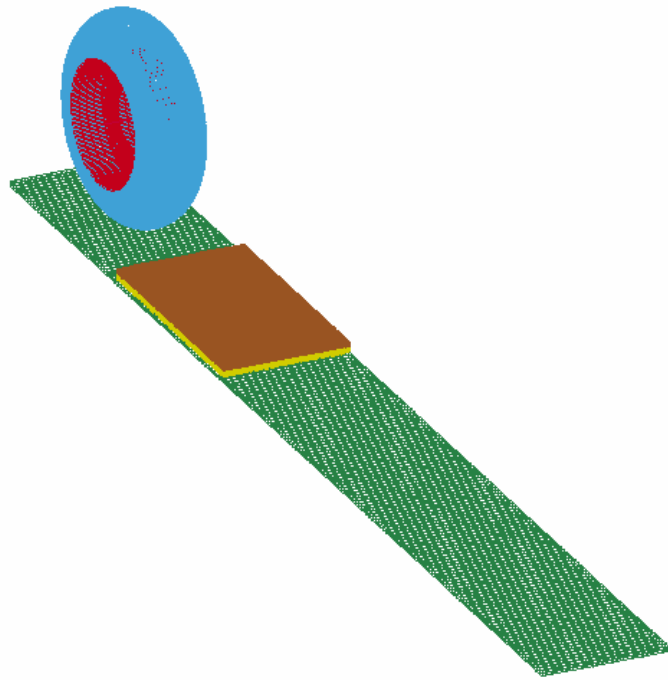
✓ Затем следует проградуировать измеритель температуры, т.е. определить соответствие между $x(t)$ и $y(t)$, задавая различные значения $x(t)$ и вычисляя .

Моделирование процесса качения шины по дорожному полотну

В работе дается описание конечно-элементной модели и приводятся результаты математического моделирования процесса качения шины по дорожному полотну, полученные с использованием программы LS-DYNA.

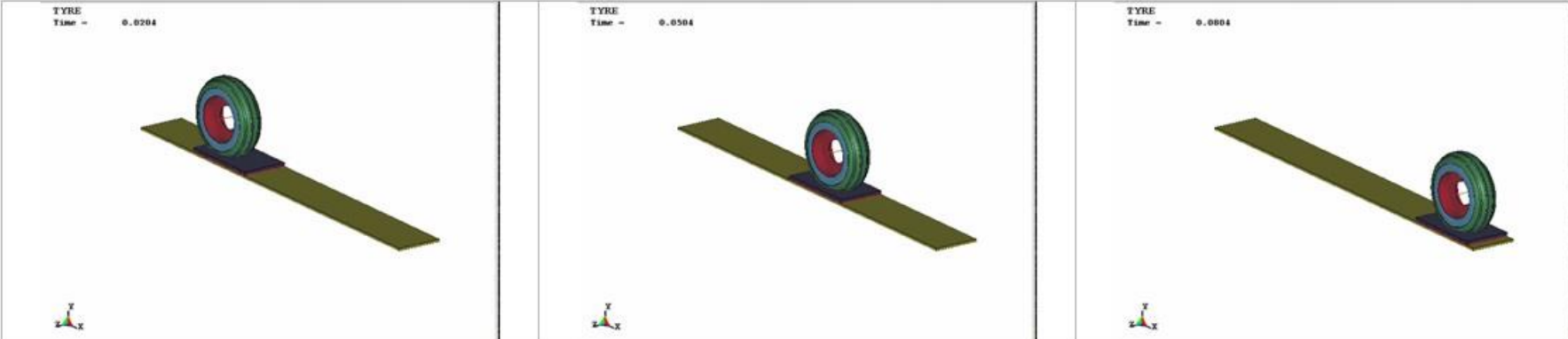


Геометрические модели процесса:
а – оболочечная; б – комбинированная

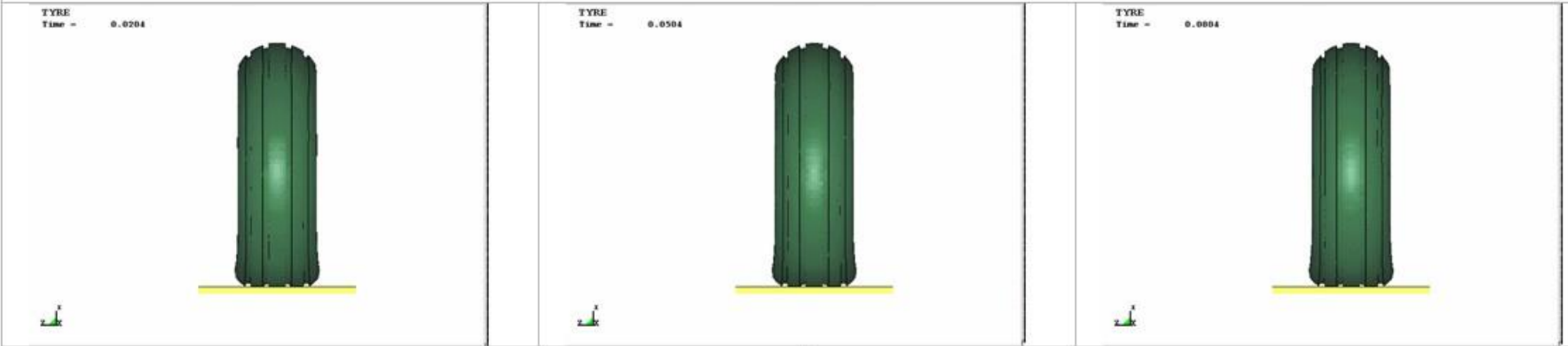


Конечно-элементные модели процесса: а – оболочечная; б – комбинированная

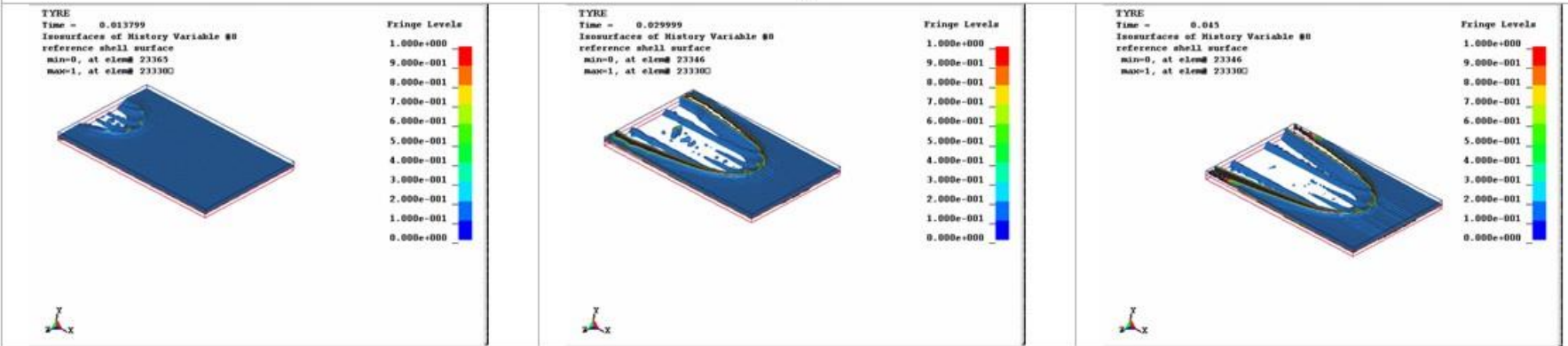
Задавались следующие нагрузки: внутреннее давление в шине p как функция времени, момент торможения m как функция времени. Давление прикладывалось к внутренней поверхности шины. Момент торможения прикладывался к оси колеса. Продолжительность процесса считалось равным времени прохождения осью колеса рассматриваемого участка дорожного полотна.



a



б



Последовательное положение частей системы В: а – движения колеса (вид сбоку); б – движения колеса (вид сзади, лужа не показана); в – движение воды

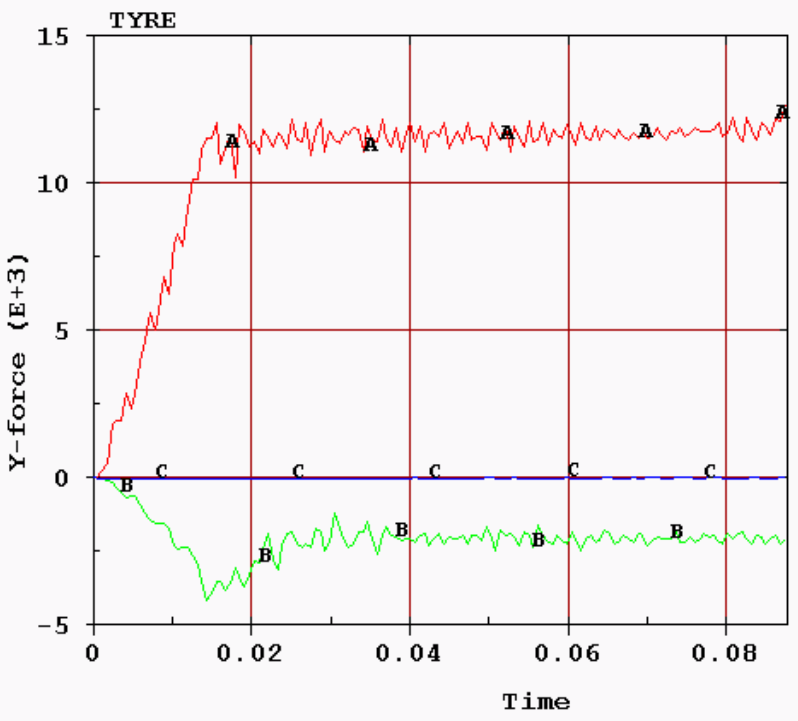


График зависимости проекций равнодействующей от времени:
 а – при $v = 30...60$ км/ч, $u = 25$ мм; б – при $v = 60...120$ км/ч, $u = 5$ мм

