Лекция №6

Тема: Динамические нагрузки в грузоподъемном механизме, оборудованном двигателем с малым моментом инерции ротора (механизмы с гидроприводом).

Цель лекции: обоснование методики определения нагрузок в процессе торможения грузоподъемного механизма с тяговым гидромотором.

Вопросы: 1. Движение «легких» масс ротора двигателя с вращающимися частями привода и опускаемого груза в процессе торможения грузоподъемного механизма.
2. Определение динамических нагрузок на грузоподъемный механизм, оборудованный гидромотором, в процессе торможения опускаемого груза.

Рассматриваемые в лекции вопросы в технической литературе пока что не нашли отражения. Излагаемый далее материал следует воспринимать в порядке обсуждения.

Вопрос 1. Движение «легких» масс ротора двигателя с вращающимися частями привода и опускаемого груза в процессе торможения грузоподъемного механизма

На прошлой лекции было показано, что формула для определения коэффициента динамичности грузоподъемного механизма по М.С. Комарову справедлива для приводов, оборудованных электроприводами с «тяжелым» якорем при отношении приведенных к поступательному движению масс двигателя с трансмиссией и груза более 3,0 (m_1 / m_2 >3,0). Современные грузоподъемные краны в значительной части оборудуют приводами с гидромоторами, момент инерции роторов которых (при той же передаваемой мощности) на порядок меньше моментов инерции крановых электродвигателей.

По причине, объясненной ранее (см. лекцию №), при $m_1 / m_2 > 3,0$ формула вида

$$k_д = 1 + \frac{1,5...3,0}{1 + {m_1}/{m_2}} \tag{1}$$

дает значительную погрешность в сторону увеличения коэффициента динамичности $k_д$ механизма в сравнении с реальной системой. Напомним, что в равенстве (1) m_1 и m_2 – приведенные к поступательному движению массы ротора двигателя с вращающимися частями двигателя (m_1) и поднимаемого груза (m_2).

Используя решение задачи о нагружении грузоподъемного механизма, полученные на основе рассмотрения двухмассовой расчетной схемы, отыщем закономерности раздельных перемещения масс m_1 и m_2. С этой целью воспроизведем эквивалентную расчетную модель грузоподъемного механизма (рис.1) и запишем ранее найденные зависимости.

Рис.1 Эквивалентную расчетную схема грузоподъемного механизма в процессе торможения груза

Уравнения движения масс m_1 и m_2

$$\ddot{z}_1 - \frac{c}{m_1}(z_2 - z_1) = -\frac{P_T}{m_1}\ ; \qquad (2)$$

$$\ddot{z}_2 - \frac{c}{m_2}(z_2 - z_1) = 0\ . \qquad (3)$$

Перемещение массы m_1 относительно массы m_2 определяется соотношением

$$\Delta Z = Z_2 - Z_1 = \frac{P_T \cdot m_2}{c(m_1 + m_2)} \cdot (1 - \cos \omega t)\ , \qquad (4)$$

где ΔZ – деформация упругой подвески груза;

$P_T = P_{Tmax} - m_2 g$ - избыточное тормозное усилие, определяемое его максимальной величиной по тормозному моменту - P_{Tmax} и силой тяжести поднимаемого груза - $m_2 g$;

c – жесткость системы подвески груза;

ω - частота свободны колебаний масс m_1 и m_2 друг относительно друга

$$\omega = \sqrt{\frac{c \cdot (m_1 + m_2)}{m_1 \cdot m_2}}\ ,$$

t – время.

Для исследования движения массы m_1 в процессе торможения опускающегося груза воспользуемся уравнением (2) и решением (4) системы уравнений (2), (3). Подставим (4) в (2). Тогда,

$$\ddot{Z}_1 - \frac{c}{m_1} \cdot \frac{P_T \cdot m_2}{c \cdot (m_1 + m_2)} \cdot (1 - \cos \omega t) = -\frac{P_T}{m_1}\ .$$

На этой основе, поскольку $\ddot{Z}_1 = d\vartheta_1/dt$, имеем

$$\frac{d\vartheta_1}{dt} = \frac{P_T \cdot m_2}{m_1 \cdot (m_1 + m_2)} \cdot (1 - \cos \omega t) - \frac{P_T}{m_1}\ . \qquad (5)$$

Дифференциальное уравнение первого порядка (5) после его интегрирования позволяет установить скорость движения массы m_1 во времени t. Действительно, согласно (5)

$$\vartheta_1 = \int \left[\frac{P_T \cdot m_2}{m_1 \cdot (m_1 + m_2)} \cdot (1 - \cos \omega t) - \frac{P_T}{m_1} \right] dt + Q_1\ ,$$

где Q_1 – постоянная интегрирования, определяемая начальными условиями.

После интегрирования последнего соотношения получаем

$$\vartheta_1 = \frac{P_T \cdot m_2}{m_1 \cdot (m_1 + m_2)} \cdot \left(t - \frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega t \right) - \frac{P_T}{m_1} \cdot t + Q_1 \ . \tag{6}$$

При $t=0$, $\vartheta_1 = \vartheta_н$. Следовательно, из (6) вытекает

$$Q_1 = \vartheta_н$$

и тогда

$$\vartheta_1 = \vartheta_H + \frac{P_T \cdot m_2}{m_1 \cdot (m_1 + m_2)} \cdot t - \frac{P_T \cdot m_2}{m_1 \cdot (m_1 + m_2)} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega t - \frac{P_T}{m_1} \cdot t_1 \ .$$

После перегруппировки слагаемых последнего соотношения имеем

$$\vartheta_1 = \vartheta_H - \frac{P_T}{m_1 + m_2} \cdot \left(t + \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega t \right) . \tag{7}$$

Таким образом, скорость массы m_1 убывает практически пропорционально t с некоторыми ее колебаниями, обусловленными вторым слагаемым, заключенным в скобках равенства (7).

Рассматривая уравнение движения массы m_2 (3) с учетом решения (4) системы уравнений (2), (3), нетрудно получить

$$\ddot{Z}_2 + \frac{c}{m_2} \cdot \frac{P_T \cdot m_2}{c \cdot (m_1 + m_2)} \cdot (1 - \cos \omega t) = 0 \ .$$

Поскольку $\ddot{Z}_2 = d\vartheta_2 / dt$, то на основании последней записи

$$d\vartheta_2 = -\frac{P_T}{m_1 + m_2} \cdot (1 - \cos \omega t) dt \ .$$

После интегрирования имеем

$$\vartheta_2 = -\frac{P_T}{m_1 + m_2} \cdot \left(t - \frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega t \right) + Q_2 \ , \tag{8}$$

где Q_2 – постоянная интегрирования.

Для второй массы m_2, как и для первой при $t=0$, $\vartheta_2 = \vartheta_н$. Тогда Q_2 из (8) приобретает значение $Q_2 = \vartheta_н$. Следовательно, скорость опускаемого груза в процессе торможения выражается зависимостью

$$\vartheta_2 = \vartheta_H - \frac{P_T}{m_1 + m_2} \cdot \left(t - \frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega t \right) . \tag{9}$$

Сопоставляя равенства (7) и (9) замечаем, что с уменьшением массы m_1 скорость массы m_2 - ϑ_2 (9) убывает медленнее, чем ϑ_1 (7). На рис.2 изображено изменение во времени скоростей движения масс m_1 (ϑ_1) и m_2 (ϑ_2) в процессе торможения опускающегося груза при $m_1 / m_2 > 3,0$. Из рис.2 следует, что если скорость ϑ_1 достигает нулевого значения ранее, чем скорость массы m_2 становится равной нулю, то на основании формализованной математической модели возможен вариант, когда деформация упругой связи между $\Delta Z??$ массами m_1 и m_2 возрастает ввиду обратного первоначальному движению массы m_1 (рис.2). По этой причине усилие в грузоподъемном полиспасте оказывается большим, чем это возможно. Данное обстоятельство противоречит смыслу действия пассивной тормозной силы. Она по своей природе не способна превратиться в движущую, всегда препятствует движению.

Рис.2 Раздельное перемещение масс m_1 и m_2 в процессе торможения груза (m_2) при $m_1 / m_2 > 3,0$

Таким образом в процессе торможения грузоподъемного механизма, оборудованного гидромотором с малым моментом инерции ротора, при достижении скорости ϑ_1 нулевого значения масса m_1 останавливается и далее остается неподвижной (рис.2). масса же груза m_2, обладая к этому моменту скоростью $\vartheta_{20} > 0$ продолжает движение вниз до остановки, растягивая подвеску. Разность перемещений масс m_1 и m_2 в этом случае определяется не значением $\Delta Z??$ (рис.2), а величиной, обусловленной суммой $\Delta Z_0 + Z_x$, где – Z_x перемещение m_2, отсчитываемое от уровня ΔZ_0.

Вопрос 2. Определение динамических нагрузок на грузоподъемный механизм, оборудованный гидромотором, в процессе торможения опускаемого груза

Изложенные в первом вопросе данной лекции соображения позволяют определить закономерности масс грузоподъемного механизма при «легком» роторе двигателя и на этой основе установить предельные усилия в грузовом полиспасте.

В этой связи необходимо принять следующее.

Во-первых, движение масс m_1 и m_2 у таких механизмов расчленяя на два этапа. Первый из них соответствует периоду от начала торможения масс до остановки массы m_1. На этом этапе перемещаются обе массы в одном направлении и закономерности их движения вполне определяются соотношениями (7) и (9). Второй этап обусловлен продолжением движения массы m_2 вниз при неподвижной массе m_1. Схематично это иллюстрирует рис.2.

Во-вторых, наибольшее усилие в грузовом полиспасте в случае остановки массы m_1 ранее, чем скорость груза m_2 достигнет нулевого значения, определяется силой тяжести поднимаемого груза m_2, упругой деформацией подвески груза к моменту остановки массы m_1 - ΔZ_0 и дополнительным растяжением канатов грузового полиспаста - Z_x после остановки массы m_1.

Первый этап движения определяется растяжением канатов полиспаста до величины ΔZ_0 к моменту остановки массы m_1, когда скорость $\vartheta_1 = 0$ (7). Из этого условия можно установить время t_{01}, соответствующее этому этапу. Из (7) следует, что $\Delta Z \to \Delta Z_0$, когда

$$\vartheta_1 = \vartheta_H - \frac{P_T}{m_1 + m_2} \cdot \left(t_{01} + \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega t_{01} \right) = 0. \tag{10}$$

Уравнение (10) является трансцендентным и не имеет решения в виде простой формулы, позволяющей выразить t_{01} через показатели $\vartheta_н$, P_T, m_1, m_2, ω, где $\omega = \sqrt{\frac{c \cdot (m_1 + m_2)}{m_1 \cdot m_2}}$ - частота свободных колебаний массы m_2 относительно m_1 при жесткой подвеске груза c.

В подобной ситуации прибегают к графоаналитическому (или численному) решению уравнения типа (10). С этой целью поступают следующим образом (рис.3). в качестве постоянной величины (из 10) принимают $\frac{\vartheta_H}{P_T} \cdot (m_1 + m_2)$, а функцию $f(t)$ определяют зависимостью $f(t) = t + \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega t$. Тогда в системе координат $f(t)$ - t строят изменение $f(t) = t + \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega t$ с ростом t до пересечения с горизонталью, ордината которой равна $\frac{\vartheta_H}{P_T} \cdot (m_1 + m_2)$.

Рис.3 Графическое решение трансцендентного уравнения (10)

Равенство (4) для отыскания максимального усилия в грузовом полиспасте механизма можно использовать, когда $t_{01} \geq t_{02}$, где t_{01} – время до остановки массы m_1; t_{02} - время достижения скоростью ϑ_2 нулевого значения. Это означает, что разность перемещений масс m_1 и m_2 - ΔZ_0 имеет наибольшее значение при совместном движении масс m_1 и m_2 в одном направлении тогда, когда достигается ΔZ_{0max} ранее, чем остановится масса m_1. Это возможно когда $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$ при $t_{01} = t_{02}$. Используя равенства (7) и (9), отыщем время $t_{01} = t_{02}$

$$\vartheta_H - \frac{P_T}{m_1 + m_2} \cdot \left(t_{01} + \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega t_{01} \right) = \vartheta_H - \frac{P_T}{m_1 + m_2} \cdot \left(t_{02} - \frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega t_{02} \right).$$

В одном случае скорости ϑ_1 и ϑ_2 равны друг другу к началу торможения механизма, когда $t_{01} = t_{02} = 0$ и $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_н$. В другом случае ($t_{01} > 0$ и $t_{02} > 0$) время достижения скоростями ϑ_1 и ϑ_2 нулевого значения одинаково, и равно t_{01} если $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$.

Или

$$-\left(t_{01} + \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega t_{01} \right) = -\left(t_{02} - \frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega t_{02} \right). \tag{11}$$

Поскольку $t_{01} = t_{02}$, то из равенства (11) следует

$$-\frac{m_2}{m_1}\sin\omega t_{01} = -\sin\omega t_{02}\,.$$

Или при $t_{01} = t_{02} = t_0$

$$\sin\omega t_0\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right) = 0\,. \qquad (12)$$

Так как сомножитель, заключенный в скобки по своей сути не может быть равным нулю, то условие (12) выполняется когда

$$\sin\omega t_0 = 0\,.$$

Это возможно, если $\omega\cdot t_0 = 0$ и далее $\omega\cdot t_0 = n\cdot\pi$, где n – целые числа.

Как было показано выше при $t_0 = 0$ $\vartheta_1 = \vartheta_2 \neq 0$. Следовательно, равенство $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$ обеспечивается при минимальном для $\omega\cdot t_0$, равном π. Отсюда устанавливается время t_0, в течении которого обе массы механизма достигают нулевых значений скоростей

$$\omega\cdot t_0 = \pi.$$

Откуда с учетом, что

$$\omega = \sqrt{c\cdot\frac{(m_1+m_2)}{m_1\cdot m_2}}\,,$$

вытекает

$$t_0 = \pi\cdot\sqrt{\frac{m_1\cdot m_2}{c\cdot(m_1+m_2)}} = \pi\cdot\sqrt{\frac{m_2}{c\cdot\left(1+{m_2}/{m_1}\right)}}\,. \qquad (13)$$

Таким образом, если время от начала торможения механизма до остановки массы m_1 - t_{01} (рис.3) оказывается меньше величины t_0 (13), то движение массы m_2 вниз продолжается после остановки массы m_1. В этом случае необходимо рассмотрения движения массы m_2 на втором этапе. Попутно отметим, что с уменьшением массы m_1 время одновременного достижения скоростями нулевых величин – t_0 сокращается, что вытекает из соотношения (13). Но при этом еще в большей мере уменьшается время остановки массы m_1 (10).

Приняв во внимание изложенное выше, можно рассмотреть движение массы m_2 на втором этапе. При этом следует принять верхние концы грузового полиспаста защемленными, а за начала отсчета перемещения массы m_2 принять временную точку t_{01}, когда взаимное перемещение масс m_1 и m_2 достигло значения ΔZ_0 (рис.2).

На рис.4 изображена расчетная схема грузоподъемного механизма, соответствующая этому.

Рис.4 Движение массы m_2 на втором этапе

К началу второго этапа деформация подвески груза (4) составляет величину

$$\Delta Z_0 = \frac{P_T \cdot m_2}{c(m_1 + m_2)} \cdot (1 - \cos \omega t_{01}) , \tag{14}$$

где t_{01} отыскивается, как было показано ранее графоаналитическим путем (рис.3).

Скорость движения вниз груза m_2 (9) снижается до значения

$$\vartheta_{20} = \vartheta_H - \frac{P_T}{m_1 + m_2} \cdot \left(t_{01} - \frac{1}{\omega} \cdot \sin \omega t_{01} \right) . \tag{15}$$

Усилие в грузовом полиспасте по мере его дальнейшего растяжения на Z_x возрастает

$$R_П = m_2 \cdot g + c \cdot \Delta Z_0 + c \cdot Z_x \ . \tag{16}$$

Уравнение движения массы m_2 на втором этапе

$$m_2 \cdot \ddot{Z}_x = m_2 \cdot g - R_П \ ,$$

после подстановки в него $R_П$ (16) и приведения к каноническому виду

$$\ddot{Z}_x + P_2^2 \cdot Z_x = -P_2^2 \cdot \Delta Z_0 \ , \tag{17}$$

имеет известное решение

$$Z_x = A \cdot \sin P_2 t + B \cdot \cos P_2 t - \Delta Z_0 \ , \tag{18}$$

где $P_2 = \sqrt{c/m_2}$ - частота свободных колебаний массы m_2 на подвеске жесткостью c;

A и B – постоянные интегрирования.

Скорость массы m_2 в колебательном процессе на втором этапе обусловлена производной выражения (18)

$$\dot{Z}_x = A \cdot P_2 \cdot \cos P_2 t - B \cdot P_2 \cdot \sin P_2 t \ . \tag{19}$$

Начальные условия второго этапа движения $t = 0;\ Z_x = 0;\ \dot{Z}_x = \vartheta_{20}$ определяют постоянные интегрирования A и B:

из (18): $B = \Delta Z_0$;

из (19): $A = \vartheta_{20}/P_2$.

Максимального значения перемещение Z_x массы m_2 достигает, когда $\dot{Z}_x = 0$. Это дает основание установить Z_{max}, выразив из (19) sin и cos посредством постоянных интегрирования. Приняв, что $\cos P_2 t = \sqrt{1 - \sin^2 P_2 t}$, после его подстановки в (19) при $\dot{Z}_x = 0$ и возведения слагаемых в квадрат, получаем

$$A^2 \cdot \left(1 - \sin^2 P_2 t\right) = B^2 \cdot \sin^2 P_2 t.$$

Отсюда следует

$$\sin P_2 t = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Подобным образом выражается и $\cos P_2 t$ через A и B, помня, что $\sin P_2 t = \sqrt{1 - \cos^2 P_2 t}$,

$$\cos P_2 t = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Установленные значения $\sin P_2 t$ и $\cos P_2 t$ соответствуют максимальному перемещению массы m_2 на втором этапе движения. Поэтому, воспользовавшись равенством (18), имеем

$$Z_{X\max} = A \cdot \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} + B \cdot \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} - \Delta Z_0 = \sqrt{A^2 + B^2} - \Delta Z_0.$$

Или после замены постоянных интегрирования A и B их значениями с учетом того, что $P_2^2 = c/m_2$ получаем

$$Z_{X\max} = \sqrt{\left(\Delta Z_0\right)^2 + \vartheta_{20}^{\ 2} \cdot \frac{m_2}{c}} - \Delta Z_0, \qquad (20)$$

где ΔZ_0 и ϑ_{20} - деформация грузового полиспаста (14) и скорость массы m_2 (15) к началу второго этапа движения m_2. Тогда наибольшее усилие в грузовом полиспасте (16) определяется выражением

$$R_{П\max} = m_2 \cdot g + c \cdot \Delta Z_0 + \sqrt{\left(c \cdot \Delta Z_0\right)^2 + \vartheta_{20}^{\ 2} \cdot c \cdot m_2} - c \cdot \Delta Z_0;$$

$$R_{П\max} = m_2 \cdot g + \sqrt{\left(c \cdot \Delta Z_0\right)^2 + \vartheta_{20}^{\ 2} \cdot c \cdot m_2}. \qquad (21)$$

Соответствующий этому коэффициент динамичности грузоподъемного механизма устанавливается соотношением

$$k_д = \frac{R_{П\max}}{m_2 \cdot g} = 1 + \frac{1}{m_2 \cdot g} \cdot \sqrt{\left(c \cdot \Delta Z_0\right)^2 + \vartheta_{20}^{\ 2} \cdot c \cdot m_2}. \qquad (22)$$

Справедливость полученных зависимостей (21), (22) подтверждается тем, что при $m_1=0$ (условно, конечно же) $\Delta Z_0 =0$ и $\vartheta_{20} =\vartheta_н$ и тогда приходим к широко известным результатам

$$R_{П\max} = m_2 \cdot g + \vartheta_Н \cdot \sqrt{c \cdot m_2} \, ,$$

и

$$k_д = 1 + \frac{\vartheta_Н}{m_2 \cdot g} \cdot \sqrt{c \cdot m_2} \, . \qquad (23)$$

С другой стороны, при одноэтапном движении масс m_1 и m_2, когда $t_{01} > t_0$, $\vartheta_{20} =0$ при $\Delta Z_0 =\Delta Z_{0max}$ и тогда на основании (21) получаем

$$R_{П\max} = m_2 \cdot g + c \cdot \Delta Z_{0\max} \, ,$$

а с учетом (4) и cos $\omega \cdot t =-1$

$$R_{П\max} = m_2 \cdot g + 2 \cdot \frac{P_T \cdot m_2}{m_1 + m_2} \, , \qquad (24)$$

что совпадает с результатом, установленным на прошлой лекции.

Расчеты свидетельствуют, что для приводов, оборудованных гидромоторами, коэффициент динамичности оказывается существенно меньшим, чем это предопределяет зависимость (1). Его величина не превышает предельного значения, отыскиваемого по формуле (23).

Контрольные вопросы

1. Чем обусловлена необходимость уточнения методики расчета динамических нагрузок на грузоподъемный механизм крана?
2. Как используются общие уравнения движения масс m_1 и m_2 для определения их раздельного перемещения в процессе торможения грузоподъемного механизма?
3. Объясните невозможность движения массы m_1 в противоположную прямому перемещению сторону в процессе торможения грузоподъемного механизма?
4. каким способом определяется время торможения массы m_1 до полной остановки на основе трансцендентного уравнения?
5. В каких случаях движение масс m_1 и m_2 тормозящегося механизма рассматривается как двухэтапное?
6. Что служит в качестве начальных условий при рассмотрении движения массы m_2 на втором этапе?
7. Чем формируется максимальное усилие в грузовом полиспасте при двухэтапном движении тормозящихся масс грузоподъемного механизма?
8. В чем заключается обобщающийся смысл выражения для определения наибольшего усилия в грузовом полиспасте, отыскиваемого на основе рассмотрения двухэтапного движения масс?