

## Лекція 4. МЕТОД СКІНЕННИХ РІЗНИЦЬ

З урахуванням усього сказаного в попередній лекції диференціальне рівняння руху автомобіля приймає досить складний вид. Наприклад, так виглядає рівняння розгону в зоні 60...100 км/год автомобіля Volkswagen Passat із двигуном 2E і шинами Michelin Energy Saver:

$$\frac{dV}{dt} = \left[ \frac{M_e u_i u_0 \eta}{r_{ko} - \lambda_M M_e u_i u_0 \eta} - 0,5 \rho C_x F \cdot \left( \frac{v}{3,6} \right)^{(8,94 \cdot 10^{-10} v^4 - 4,12 \cdot 10^{-7} v^3 + 9,24 \cdot 10^{-5} v^2 - 0,01057 v + 2,45)} \right] \cdot \frac{1}{\delta \cdot m_a}, \quad (4.1)$$

$$\left( 0,377 \left( r_{ko} - \lambda_M M_e u_i u_0 \eta \right) \left( 1,55 \cdot 10^{-7} v^2 - 1,051 \cdot 10^{-5} v + 0,008569 \right) \right)$$

де

$$M_e = 2,29 \cdot 10^{-19} n^6 - 5,76 \cdot 10^{-15} n^5 + 5,78 \cdot 10^{-11} n^4 - 2,94 \cdot 10^{-7} n^3 + 7,9 \cdot 10^{-4} n^2 - 1,0376 n + 65,504,$$

$$n = \frac{v \cdot u_i u_0}{0,377 \left( r_{ko} - \lambda_M M_e u_i u_0 \eta \right)}$$

У загальному випадку розглянуте завдання являє собою пошук рішення диференціального рівняння виду

$$u'' + q(x) \cdot u' - p(x) \cdot u = z(x), \quad x \in [a, b]$$

Оскільки рішення повинне бути знайдене при двох умовах (початкова й кінцева швидкість), це типове крайове завдання з умовами

$$u(a) = \varphi, \quad u(b) = \psi, \quad \varphi = V_0, \quad \psi = V_{..}$$

Вирішити такі завдання аналітично вдається лише для деяких спеціальних типів рівнянь, до яких наше рівняння не відноситься. Існують різні способи чисельного рішення таких завдань, зокрема метод скінченних різниць. Рішення цим методом складається з нижченаведених етапів.

Область безперервної зміни аргументу [a, b] заміняють дискретною множиною точок, називаних вузлами:

$$x_i = a + h \cdot i, \quad i = 0, \dots, n, \quad n = \frac{b-a}{h}.$$

Шукану функцію безперервного аргументу  $x$  заміняють функцією дискретного аргументу на заданій сітці, тобто

$$u(x) \rightarrow u_k = (u_0, \dots, u_k).$$

Функція  $u_k$  називається сітковою.

Вихідне диференціальне рівняння заміняють різницеvim рівнянням щодо сіткової функції. Рішення диференціального рівняння зводиться до відшукування значень сіткової функції у вузлах сітки, а ці значення отримують із рішення алгебраїчних рівнянь. Останнє не викликає жодних утруднень. Практичний інтерес являє собою вибір кроку сітки  $h$  як компромісу між припустимою погрішністю розрахунку й прагненням скоротити обсяг обчислень.

Рекомендується застосувати методи, орієнтовані на використання табличного процесора Microsoft Excel. Ця програма має недоліки, у першу чергу - необхідність заміни складових формули адресами чарунків. Однак можливість одержувати рішення у вигляді таблиць і графіків з гарною наочністю компенсує ці незручності.

У найпростішому варіанті, коли залежності від швидкості всіх складових тягового балансу описуються поліномами, слід підсумувати коефіцієнти при однакових степенях швидкості, а потім описаним методом вирішувати отримане диференціальне рівняння виду

$$\frac{dv}{dt} = j = Av^n + Bv^{n-1} + Cv^{n-2} + \dots + Wv + Z. \quad (2.3)$$

Далі, вибравши крок сітки (тобто інтервал швидкості від  $v_i$  до  $v_{i+1}$ ), обчислювати значення прискорення  $j_i$  на початку й наприкінці кожного кроку. Потім обчислити час проходження автомобілем кожного інтервалу швидкостей  $t_i$  при допущенні, що в межах одного інтервалу рух

рівноприскорений, після чого, підсумовуючи інтервальні значення часу, одержати сумарний час і шлях розгону (або вибігу)  $v_0$  до  $v_n$ :

$$t_i = \frac{v_{i+1} - v_i}{3,6 \cdot (j_i / 2 + j_{i+1} / 2)}, \quad t_{0-n} = \sum_{i=1}^n t_i, \quad S_i = \frac{v_{i+1} + v_i}{3,6 \cdot 2} \cdot t_i, \quad S_{0-n} = \sum_{i=1}^n S_i \quad .(2.4)$$

У більше складному варіанті, коли частина складових описується іншими функціями (показниковою, логарифмічною тощо), потрібно обчислювати для кожного вузла сітки значення кожної складової сили, по їхній сумі - прискорення, а далі вирішувати, як описано в попередньому випадку.

Для перевірки були взяті результати полігонних випробувань автомобіля Honda Civic, виконаних експертами журналу "Авторевю". Час розгону автомобіля розраховано по аналітичному рішенню дифференціального рівняння, а потім чисельно, МСР, з різним кроком сітки.

Таблиця 2.1 - Результати розрахунку часу розгону від 60 до 100 км/год чисельним методом з різним кроком сітки

Крок сітки, км/год	Час від 60 до 100 км/год	Абсолютна похибка розрахунку $\Delta t$ , с	Відносна похибка розрахунку $\epsilon$ , %
	По аналітичному рішенню диференціального рівняння – <b>6,6996321 с</b>		
1	6,699795	0,000163	0,002432
2	6,700284	0,000652	0,009733
5	6,703712668	0,004081	0,060907
10	6,716027314	0,016395214	0,244718124
20	6,766356427	0,066724327	0,995940172

Як видно з таблиці, якщо прийняти крок сітки (тобто дискретизації діапазону швидкостей) 5 км/год або менш, похибка результату складе не більше 0,1 %. Навіть при кроці сітки 20 км/год відносна похибка усього 1%.

У рівнянні (9) не відбите залежне від прискорення зниження крутного моменту і зсув точки максимального моменту уздовж осі обертів, що спостерігається при розгоні. Крива ефективного крутного моменту в ряді випадків здобуває явно виражену опуклу форму. Теорія розгону автомобіля

із сучасним двигуном освітлена в літературі явно недостатньо. Вона не дозволяє описати зазначені зміни конфігурації кривої моменту не тільки в числах, але навіть по напрямку, тобто вказати, чи відбудеться зсув в область менших або більших частот обертання колінчатого вала ДВС.

У доступній інформації важко знайти потрібні відомості, наприклад, дані про пружні властивості сучасних шин. У багатьох роботах автори довільно підмінюють динамічний радіус радіусом кочення, а часом і дорівнюють обидва ці радіуси статичному [1], що в принципі припустимо лише для спрощених розрахунків.

Все сказане змушує постійно уточнювати теорію руху автомобіля й удосконалювати її.

Описані тут особливості й взаємозв'язки частково запозичені з літературних джерел, частково є результатом наукових досліджень кафедри ТЕСА ХНАДУ.